

О ЧИСЛЕННОМ НАХОЖДЕНИИ ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭГД ТЕЧЕНИЯХ НЕСЖИМАЕМЫХ ПОЛИМЕРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Мищенко Е.В.^{*}, Гуань С.^{**}

^{*}Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск

^{**}Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск

Поступила в редакцию 21.01.2025, после переработки 04.03.2025.

Целью данной работы является разработка подхода для численного нахождения объемного заряда и электрического потенциала в нестационарных ЭГД-течениях несжимаемой полимерной жидкости типа Пуазейля в плоском канале и получение решений для разных параметров, входящих в задачу. Рассматривается реологическая модель, являющаяся модификацией модели Виноградова – Покровского. Уравнения в модели весьма нелинейны, и найти решение в явном виде не представляется возможным. Таким образом, актуальной становится задача по нахождению численного решения данной задачи. Для нахождения двух компонент, а именно, объемного заряда и электрического потенциала, в статье предложены две сеточные схемы и получены численные решения для различных значений параметров задачи.

Ключевые слова: несжимаемая полимерная жидкость в канале, течение Пуазейля, численное решение, сеточная схема, объемный заряд, электрический потенциал.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 1. С. 33–50.
<https://doi.org/10.26456/vtpmk727>

Введение

Изучение поведения слабопроводящих и диэлектрических жидкостей в электрическом поле вызывает большой интерес исследователей в связи с возможностью использования результатов в различных технологических приложениях. Можно отметить работы [1–5], в которых исследовались электроконвекция, характер нелинейной эволюции режимов, устойчивость и колебания системы в горизонтальном слое слабопроводящей жидкости, источником зарядов в которой является один из механизмов (инжекционный, диэлектрофоретический или электрокондуктивный), их комбинация либо собственные ионы. Работы [6–10] посвящены изучению течений несжимаемой полимерной жидкости, нахождению стационарных решений системы и исследованию их устойчивости, в том числе и при наличии магнитного поля.

© Мищенко Е.В., Гуань С., 2025

В настоящей работе рассмотрена система уравнений, описывающих электрическую конвекцию слабопроводящей несжимаемой полимерной жидкости в горизонтальных слоях в плоском бесконечном канале. Работа основана на варианте реологической модели Виноградова-Покровского. Полимерная жидкость представляется как суспензия невзаимодействующих упругих гантелей. Каждая из гантелей представляет собой две броуновские частицы. Они связаны упругой силой и движутся в анизотропной жидкости, состоящей из растворителя и других гантелей. Эта модель включает в себя новое реологическое соотношение между кинематическими характеристиками потока и внутренними термодинамическими параметрами. Сформулированная физическая модель оказалась эффективной при описании медленных релаксационных процессов в системах, содержащих линейные полимеры. Как отмечается в работах [6, 7, 9, 10], принятое физическое представление о сплошной полимерной среде дает возможность описать её основные реологические свойства: убывание вязкости и первой разности нормальных напряжений к определённому пределу с ростом скоростей деформации.

Более того, модель Виноградова – Покровского, в отличие от других известных моделей [11–13], позволяет получить ненулевые значения второй разности нормальных напряжений. Именно, учтено влияние анизотропии среды, окружающей выделенную макромолекулу, которое вызвано растяжением и ориентированием входящих в неё макромолекулярных цепочек.

Реологические свойства, предсказываемые моделью Виноградова – Покровского, качественно и количественно согласуются с экспериментальными данными для растворов и расплавов полимеров [14–16].

Целью данной работы является нахождение объемного заряда и электрического потенциала в нестационарных ЭГД течениях несжимаемой полимерной жидкости типа Пуазейля. Ввиду сильной нелинейности уравнений предложены два подхода для численного нахождения значений указанных компонент.

1. Основные уравнения

Мы рассматриваем неизотермическую электрическую конвекцию слабопроводящей несжимаемой полимерной жидкости в канале, образованном двумя горизонтальными плоскостями: анодом и катодом; объемный заряд генерируется в жидкости за счет инъекции заряда с анода. В качестве основы исследования была выбрана реологическая модель Виноградова – Покровского [17].

За счет введения безразмерных переменных двумерные уравнения электрогидродинамики (ЭГД) могут быть записаны в безразмерной форме, в которой компоненты вектора скорости u и v , компоненты тензора a_{ij} , время t , координаты x, y , давление P , объемный заряд q и электрический потенциал Φ относятся к характерным величинам u_H , $\frac{W_i}{3}$, $\hat{l}/u_H$, $\hat{l}$, ρu_H^2 , $\varepsilon_0 \varepsilon U / \hat{l}^2$, U (полностью обозначения приведены ниже).

Уравнения модели принимают вид:

$$\operatorname{div} \vec{u} = u_x + v_y = 0,$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla P = \operatorname{div} \Pi - \sigma q \vec{Q},$$

$$\begin{aligned}
\frac{da_{11}}{dt} - 2A_1u_x - 2a_{12}u_y + L_{11} &= 0, \\
\frac{da_{12}}{dt} - A_1v_x - A_2u_y + \tilde{K}_I a_{12} &= 0, \\
\frac{da_{22}}{dt} - 2A_2v_y - 2a_{12}u_x + L_{22} &= 0, \\
\frac{dq}{dt} - b \cdot \operatorname{div}(q\vec{Q}) &= 0, \\
\Delta_{x,y}\Phi &= -q.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь использованы следующие обозначения
– для дифференциальных операторов:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla), \quad \Delta_{x,y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

для переменных, входящих в уравнения:

t – время, x, y – декартова система координат;

u, v – компоненты вектора скорости $\vec{u}$;

P – давление,

Π – симметрический тензор анизотропии второго ранга;

$a_{ij}, i, j = 1, 2$ – компоненты тензора;

$\vec{a}_1, \vec{a}_2$ – столбцы симметрической матрицы тензора;

$$\operatorname{div}\Pi = (\operatorname{div}(\vec{a}_1), \operatorname{div}(\vec{a}_2))^T,$$

$\vec{Q} = \nabla\Phi$, Φ – потенциал электрического поля;

$q > 0$ – объёмный заряд;

$$\begin{aligned}
L_{11} &= K_I a_{11} + \beta(a_{11}^2 + a_{12}^2), \quad L_{22} = K_I a_{22} + \beta(a_{12}^2 + a_{22}^2), \\
K_I &= Wi^{-1} + \frac{k - \beta}{3}I, \quad \tilde{K}_I = Wi^{-1} + \frac{k + 2\beta}{3}I, \quad I = a_{11} + a_{22}, \\
A_1 &= a_{11} + Wi^{-1}, \quad A_2 = a_{22} + Wi^{-1},
\end{aligned}$$

– для констант, входящих в уравнения:

k, β ($0 < \beta < 1$) – феноменологические параметры модели, характеризующие вклады, связанные с анизотропией, размер клубка и его ориентацию;

$\operatorname{Re} = \frac{\rho u_H \hat{l}}{\eta_0}$ – число Рейнольдса;

$\rho (= \text{const})$ – плотность среды;

$Wi = \frac{\tau_0 u_H}{\hat{l}}$ – число Вейсенберга;

η_0, τ_0 – начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации;

$\hat{l}$ – характерная длина (ширина канала);

u_H – характерная скорость,

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U^2}{\rho(u_H \hat{l})^2}, \quad b = \frac{KU}{u_H \hat{l}},$$

ε_0 – электрическая постоянная;

ε – диэлектрическая проницаемость;

$K > 0$ – подвижность ионов;

U – размерное значение потенциала на аноде $y = 1$.

Таким образом, эта математическая модель описывает слабопроводящие полимерные жидкости в плоском горизонтальном конденсаторе; его электроды представляют собой две горизонтальные плоскости с расстоянием, равным $\hat{l}$. На его границах, то есть на поверхности электродов $y = 0$ (катод), $y = 1$ (анод), выполняются условия непроницаемости. Следовательно, возникают следующие граничные условия:

$$\begin{cases} y = 0, 1 : \vec{u} = 0; \\ y = 0 : \Phi = 0; \\ y = 1 : \Phi = 1(U), q = a \cdot \Phi_y (a > 0); \end{cases} \quad (2)$$

Замечание 1. Физический смысл последнего граничного условия в (2) таков: на анод подается положительный заряд. Он пропорционален величине электрического поля, при этом инжекция может быть слабой, т.е. $a \ll 1$.

2. Постановка задачи для полимерной жидкости типа Пуазейля

Наше внимание обращено на частный случай модели (1)–(2), а именно, на течения полимерной жидкости типа Пуазейля. С математической точки зрения, это подразумевает следующие допущения: одна составляющая скорости, компоненты тензора, заряд и потенциал не зависят от переменной x , другая составляющая скорости равна нулю, давление содержит функцию $A(t)$, которая описывает падение давления в канале:

$$\begin{cases} u = u(t, y), v \equiv 0, \\ a_{ij} = a_{ij}(t, y), i, j = 1, 2; \\ P = \mathcal{P}(t, y) - A(t)x, \\ \Phi = \Phi(t, y), q = q(t, y). \end{cases} \quad (3)$$

Исходя из этих предположений, мы имеем

$$\begin{aligned} u_t - (\alpha_{12})_y &= A(t), \\ (\alpha_{12})_t - \alpha_2 \cdot u_y + \widetilde{K}_I \cdot \alpha_{12} &= 0, \\ (\alpha_{11})_t - 2\alpha_{12} \cdot u_y + \widetilde{K}_I \cdot \alpha_{11} - \beta \cdot \text{Re} \cdot \Delta &= 0, \\ (\alpha_{22})_t + \widetilde{K}_I \cdot \alpha_{22} - \beta \cdot \text{Re} \cdot \Delta &= 0, \\ q_t - b \cdot \Phi_y \cdot q_y + b \cdot q^2 &= 0, \\ \Phi_{yy} &= -q. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\alpha_{ij} = \frac{a_{ij}}{\text{Re}}, i, j = 1, 2$, Δ – характерное значение,

$$\Delta = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2, \quad \alpha_2 = \frac{A_2}{\text{Re}},$$

$$\widetilde{K}_I = Wi^{-1} + \frac{k + 2\beta}{3} \cdot \text{Re} \cdot \widetilde{I}, \quad \widetilde{I} = \alpha_{11} + \alpha_{22}.$$

Граничными и начальными условиями являются (см. [18]):

$$\begin{cases} u|_{y=0,1} = 0, t > 0, \\ \Phi|_{y=0} = 0, \Phi|_{y=1} = 1, t > 0, \\ q = a \cdot \Phi_y(a > 0) \quad \text{при} \quad y = 1, t > 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u_0(y), 0 < y < 1, \\ \alpha_{ij}|_{t=0} = (\alpha_{ij})_0(y), 0 < y < 1, \\ \Phi|_{t=0} = \Phi_0(y), 0 < y < 1, \\ q|_{t=0} = q_0(y), 0 < y < 1. \end{cases} \quad (6)$$

Замечание 2. Случай $A(t) = \text{const}(= A_0)$ и $u_0(y) \equiv 0$ для вязких жидкостей рассматривался в [19], [20].

Замечание 3. Мы предполагаем, что начальные и граничные условия совместимы:

$$\begin{cases} u_0|_{y=0,1} = 0, \\ \Phi_0(0) = 0, \Phi_0(1) = 1, \\ q_0(1) = a \cdot \alpha_0, \alpha_0 = (\Phi_0)_y(1). \end{cases} \quad (7)$$

Хорошо видно, что в соответствии с предположениями (3), система (4) делится на две подсистемы, и мы можем сформулировать начально-краевую задачу (НКЗ) для нахождения пространственного заряда q и электрического потенциала Φ , которую образуют два последних уравнения из (4)

$$q_t - b \cdot \Phi_y \cdot q_y + b \cdot q^2 = 0, \quad (8)$$

$$\Phi_{yy} = -q, \quad (9)$$

и начальные и краевые условия из (5) и (6), соответственно,

$$\begin{cases} \Phi|_{y=0} = 0, \Phi|_{y=1} = 1, t > 0, \\ q = a \cdot \Phi_y(a > 0) \quad \text{при} \quad y = 1, t > 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \Phi|_{t=0} = \Phi_0(y), 0 < y < 1, \\ q|_{t=0} = q_0(y), 0 < y < 1. \end{cases} \quad (11)$$

Ввиду сильной нелинейности задачи (8–11), мы определим решение численно. В следующих параграфах предлагаются два подхода для нахождения заряда q и потенциала Φ .

3. Численный метод I

В этом разделе мы получим формулы для первого численного метода. Из (8)–(11) следует, что $\Phi(t, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{yy} = -q$$

и граничным условиям

$$\Phi|_{y=0} = 0, \quad \Phi|_{y=1} = 1, \quad t > 0.$$

Рассматривая t в качестве параметра, мы имеем краевую задачу на отрезке $[0, 1]$ для обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка по переменной y с правой частью $-q$. Фундаментальная система уравнения состоит из двух функций 1 и y . Таким образом, получаем

$$\Phi(t, y) = y \cdot \left[1 + \int_0^1 q(t, r)(1-r)dr \right] - \int_0^y q(t, r)(y-r)dr, \quad (12)$$

и

$$\Phi_y(t, y) = 1 + \int_0^1 q(t, r)(1-r)dr - \int_0^y q(t, r)dr. \quad (13)$$

Введем функцию

$$\mathcal{L}(t, y) = \frac{1}{q(t, y)} - b \cdot t, \quad \left(q = \frac{1}{\mathcal{L} + b \cdot t} \right),$$

и благодаря новой форме (8)

$$\left(\frac{q_t}{q^2} + b \right) - \frac{b \cdot \Phi_y \cdot q_y}{q^2} = 0,$$

получим уравнение

$$\mathcal{L}_t - b \cdot \Phi_y \cdot \mathcal{L}_y = 0, \quad (14)$$

которое можно рассматривать как квазилинейное уравнение переноса относительно $\mathcal{L}$. Для нахождения его численного решения мы используем схему бегущего счета [21].

Вводя сеточные функции

$$\begin{aligned} q(n \cdot \tau, i \cdot h) &= q_i^n, \quad \mathcal{L}(n \cdot \tau, i \cdot h) = \mathcal{L}_i^n, \\ \mathcal{L}_i^n &= \frac{1}{q_i^n} - b \cdot n\tau, \quad q_i^n = \frac{1}{\mathcal{L}_i^n + bn\tau}, \end{aligned} \quad (15)$$

аппроксимируем дифференциальные операторы в (14) их дифференциально-разностными аналогами, меняя

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t &\text{ на } \frac{\mathcal{L}_i^{n+1} - \mathcal{L}_i^n}{\tau}, \\ \mathcal{L}_y &\text{ на } \frac{\mathcal{L}_{i+1}^{n+1} - \mathcal{L}_i^{n+1}}{h}. \end{aligned}$$

Здесь τ и h - временные и пространственные шаги разностной сетки. Следовательно, (14) на сетке превращается в

$$\frac{\mathcal{L}_i^{n+1} - \mathcal{L}_i^n}{\tau} - b\Phi_{y_i}^n \frac{\mathcal{L}_{i+1}^{n+1} - \mathcal{L}_i^{n+1}}{h} = 0. \quad (16)$$

Для начала счета нужно знать значения $q(t, y)$ при $t = 0$:

$$q_i^0 = q_0(i \cdot h), \mathcal{L}_i^0 = \mathcal{L}_0(i \cdot h),$$

$$\mathcal{L}_0(y) = \frac{1}{q_0(y)}.$$

Ниже мы обсудим, как найти $q_i^0 = q(0, i \cdot h)$, $L_i^0 = \mathcal{L}(0, i \cdot h)$.

Замечание 4. В работах [22], [23] авторы используют так называемую нелинейную итерацию, чтобы избежать скачкообразного роста неизвестных. Основная идея этого трюка заключается в вычислении переменных задачи по формулам, назначенным для последующего временного слоя, оставаясь при этом на текущем временном слое. В наших формулах дополнительный параметр λ , который варьируется от 0 до Λ , характеризует количество итераций по нелинейности.

$$\mathcal{L}_i^{n+1+\lambda} = \frac{d \cdot b \cdot (\Phi_y)_i^{(n+\lambda)} \cdot \mathcal{L}_{i+1}^{n+1+\lambda} + \mathcal{L}_i^n}{1 + b \cdot (\Phi_y)_i^{n+\lambda} \cdot d}, \lambda = \overline{0, \Lambda-1}, i = N-1, \dots, 0, \quad (17)$$

$$d = \tau/h, \\ \mathcal{L}_i^{n+\Lambda} = \mathcal{L}_i^{n+1}.$$

Очевидно, что $\mathcal{L}_N^n = \mathcal{L}(n\tau, 1)$, и мы используем последнее выражение в (10), которое дает значения при $y = 1$ для получения промежуточных значений $\mathcal{L}_N^{n+1+\lambda}$. Интегралы для производной Φ_y в (13) вычисляются по правилу трапеции ([24]):

$$q_N^{n+1+\lambda} = a(\Phi_y)_N^{(n+\lambda)} = a\{1 - \frac{h^2}{2} [2 \sum_{i=1}^{N-1} i q_i^{(n+\lambda)} + N q_N^{(n+\lambda)}]\}. \quad (18)$$

$$(\Phi_y)_i^{n+\lambda} = 1 + h \cdot \sum_{j=1}^{N-1} q_j^{(n+\lambda)} (1 - jh) + \frac{h}{2} \cdot q_0^{(n+\lambda)} - \\ - \frac{h}{2} [2 \sum_{j=1}^{i-1} q_j^{(n+\lambda)} + q_i^{(n+\lambda)} + q_0^{(n+\lambda)}]. \quad (19)$$

$$(\Phi)_i^{n+\lambda} = ih \cdot (1 + h \cdot \sum_{j=1}^{N-1} q_j^{(n+\lambda)} (1 - jh) + \frac{h}{2} \cdot q_0^{(n+\lambda)}) - \\ - \frac{h}{2} [2 \sum_{j=1}^{i-1} q_j^{(n+\lambda)} \cdot (ih - jh) + q_0^{(n+\lambda) \cdot ih}]. \quad (20)$$

Здесь мы обозначаем

$$(\cdot)_i^{(n+\lambda)} = \frac{(\cdot)_i^{n+\lambda} + (\cdot)_i^n}{2}.$$

Все необходимые формулы получены.

4. Численный метод II

Рассмотрим формулу (8) под другим углом зрения и получим альтернативные формулы для численного нахождения объемного заряда и электрического потенциала. Имея два метода нахождения искомых значений, мы получаем, во-первых,

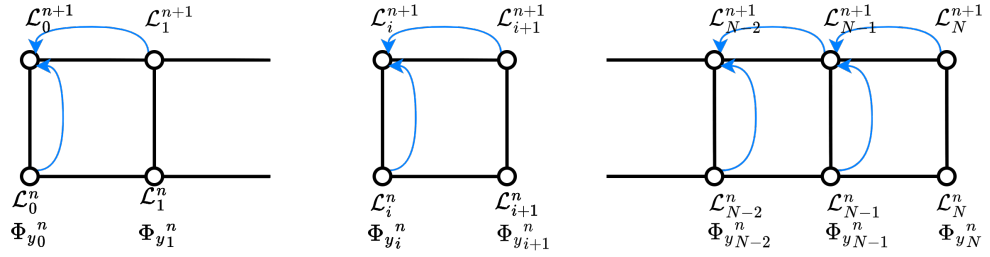


Рис. 1: Схема для вычисления L_i^n . Метод I

возможность сравнить результаты и, таким образом, обосновать, что результаты являются адекватными при условии, что результаты для обоих методов схожи, и, во-вторых, выбрать, какой метод работает лучше.

Итак, мы вводим в рассмотрение функцию $F(t, y)$:

$$F(t, y) = \int_0^y q(t, r) dr.$$

и обозначаем $\Phi_y(t, y) = L(t, y)$. Очевидно, $F(t, 0) = 0$. По (9) имеем

$$L_y(t, y) = -q(t, y) = -F_y(t, y).$$

Изменяя порядок интегрирования, мы имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 q(t, r)(1-r)dr &= \int_0^1 q(t, r) \int_r^1 dpdr = \int_0^1 \int_r^1 q(t, r) dpdr = \\ &= \int_0^1 \int_r^1 q(t, p) dpdr = \int_0^1 F(t, r) dr. \end{aligned}$$

Далее

$$L(t, y) = 1 + \int_0^1 F(t, r) dr - F(t, y) = \mathcal{A}(t) - F(t, y) \rightarrow \int_0^1 L(t, r) dr = 1.$$

Уравнение (8) превращается в

$$-L_{ty} - bL_y(-L_{yy}) + bL_y^2 = 0 \quad \text{или} \quad L_{ty} - b(LL_y)_y = 0, \quad (21)$$

которое после интегрирования дает

$$L_t - bLL_y = C(t) \quad \text{или} \quad L_t - \frac{b}{2}(L^2)_y = C(t). \quad (22)$$

Формулы (21) и (22) дают выражение для $C(t)$:

$$C(t) = -b[L^2(t, 1) - L^2(t, 0)]/2. \quad (23)$$

Теперь мы подставим (22) в (23) и рассмотрим его разностную форму:

$$L_i^{n+1} - L_i^n - bd((L_{i+1}^{n+1})^2 - (L_i^{n+1})^2)/2 + \tau b((L_N^{n+1})^2 - (L_0^{(n+\lambda)})^2)/2 = 0,$$

здесь

$$d = \tau/h, \quad L_0^{(n+\lambda)} = \frac{L_0^{n+\lambda} + L_0^n}{2}.$$

Мы приходим к выводу, что в зависимости от значений i у нас есть три типа формул для определения L_i^n .

Для $i = N-2, \dots, 1$

$$\hat{\alpha}(L_i^{n+1})^2 + \hat{\beta}L_i^{n+1} + \hat{c} = 0, \quad (24)$$

здесь

$$\hat{\alpha} = \frac{bd}{2}, \quad \hat{\beta} = 1, \quad \hat{c} = -L_i^n - bd \frac{(L_{i+1}^{n+1})^2}{2} + \tau b \frac{(L_N^{n+1})^2 - (L_0^{n+\lambda})^2}{2}.$$

Для $i = N-1$

$$\hat{\alpha}(L_{N-1}^{n+1})^2 + \hat{\beta}L_{N-1}^{n+1} + \hat{c} = 0, \quad (25)$$

и

$$\hat{\alpha} = \left(1 - \frac{1}{(1+ah)^2}\right) \frac{bd}{2} + \frac{\tau b}{2(1+ah)^2}, \quad \hat{\beta} = 1, \quad \hat{c} = -L_{N-1}^n - \tau b \frac{(L_0^{(n+\lambda)})^2}{2}.$$

Для $i = 0$

$$\hat{\alpha}(L_0^{n+1})^2 + \hat{\beta}L_0^{n+1} + \hat{c} = 0, \quad (26)$$

и

$$\hat{\alpha} = \frac{bd}{2} - \frac{\tau b}{2}, \quad \hat{\beta} = 1, \quad \hat{c} = -L_0^n - bd \frac{(L_1^{n+1})^2}{2} + \tau b \frac{(L_N^{(n+1)})^2}{2}.$$

Граничные условия (10) в обозначениях этого раздела имеют вид

$$L_y(t, 1) + aL(t, 1) = 0.$$

Разностный аналог задается формулой

$$L_N^{n+1} = \frac{L_{N-1}^{n+1}}{1+ah}. \quad (27)$$

q_i^{n+1} задается с помощью

$$q_i^{n+1} = \frac{\ln(L_i^n) - \ln(L_i^{n+1})}{\tau b} + \frac{(L_0^{n+1})^2 - (L_N^{n+1})^2}{2L_i^{n+1}}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (28)$$

5. Стационарное решение для НКЗ

Если процесс не зависит от времени, то объемный заряд q и электрический потенциал Φ являются стационарными и зависят только от y . Обозначим эти стационарные решения следующим образом: $q = \hat{q}(y)$, $\Phi = \hat{\Phi}(y)$. В соответствии с этим предположением из (8) следует, что

$$\hat{q}'(y)\hat{\Phi}'(y) + q(y)\hat{\Phi}''(y) = (\hat{q}(y)\hat{\Phi}'(y))' = 0,$$

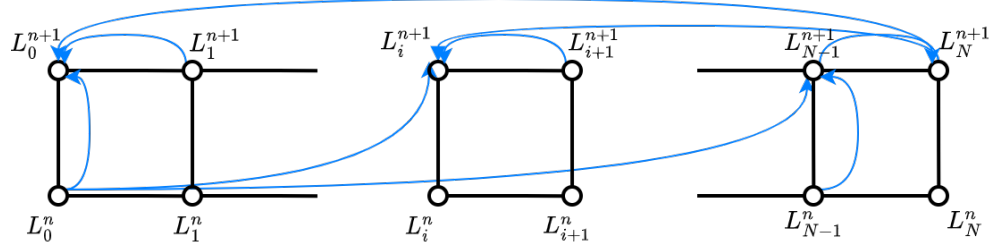


Рис. 2: Схема для вычисления L_i^n . Метод II

и с учетом последнего выражения в (10)

$$\hat{q}(y) \cdot \hat{\Phi}'(y) = a \cdot B^2, B = \hat{\Phi}'(1).$$

Тогда из (9) следует, что

$$-\hat{\Phi}''(y)\hat{\Phi}'(y) = aB^2.$$

Следовательно

$$-\frac{1}{2}(\hat{\Phi}'(y))^2 = B^2 \cdot ay + c, c = -B^2\left(\frac{1}{2} + a\right).$$

Тогда

$$(\hat{\Phi}'(y))^2 = B^2[1 + 2a(1 - y)].$$

Предполагая, что заряд положительный, т.е. $\hat{\Phi}'(y) \geq 0$, мы выбираем положительную ветвь квадратного корня и получаем

$$\hat{\Phi}'(y) = B \cdot [1 + 2a(1 - y)]^{\frac{1}{2}}. \quad (29)$$

Интегрирование (29) по y приводит к

$$\hat{\Phi}(y) = -\frac{B}{3a}(1 + 2a(1 - y))^{\frac{3}{2}} + c.$$

Два неизвестных значения c и B можно найти с помощью граничных условий (10):

$$y = 1: \quad 1 = -\frac{B^2}{3a} + c, \quad c = 1 + \frac{B}{3a}; \quad y = 0: \quad 1 + \frac{B}{3a} = \frac{B}{3a}(1 + 2a)^{\frac{3}{2}}.$$

Таким образом,

$$B = \frac{3a}{(1 + 2a)^{\frac{3}{2}} - 1}, \quad c = \frac{(1 + 2a)^{\frac{3}{2}}}{(1 + 2a)^{\frac{3}{2}} - 1}.$$

Выражения для $\hat{\Phi}(y)$ and $\hat{q}(y)$ приобретают вид

$$\hat{\Phi}(y) = \frac{[1 + 2a]^{\frac{3}{2}} - [1 + 2a(1 - y)]^{\frac{3}{2}}}{[1 + 2a]^{\frac{3}{2}} - 1}, \quad (30)$$

$$\hat{q}(y) = \frac{3a^2}{[1 + 2a(1 - y)]^{\frac{1}{2}} \cdot ([1 + 2a]^{\frac{3}{2}} - 1)}. \quad (31)$$

Таким образом получены выражения для переменных

$$q_i^0 = \hat{q}(i \cdot h), \quad L_i^0 = \hat{L}(i \cdot h),$$

которые входят в расчетные формулы, приведенные в разделах 3 и 4.

6. Результаты численных экспериментов

Алгоритмы реализованы на языке программирования Python. Вычисления проведены по формулам, полученным в разделах 3-5. Два параметра — a и b — характеризуют процесс и входят в формулы в НКЗ (см. обозначения раздела 1, формулы (8),(10) и замечание 1). Вычисления были проведены для разных значений параметров: когда a и b равны ($a = b$) и когда они различны ($a \ll b, b \ll a$). На рисунках 3-6 приведены трехмерные графики искомых величин для некоторых значений параметров a и b . Значения численных параметров приведены в таблице 1.

Таблица 1: Таблица расчетных параметров

Параметры	Описание	значение
ε	точность	$10^{-4} - 10^{-8}$
h	пространственный шаг	0.001 - 0.002
τ	временной шаг	0.1 - 0.001
Λ	количество нелинейных итераций	1 - 2
a	параметры системы	0,001–1
b	параметры системы	0,001–1

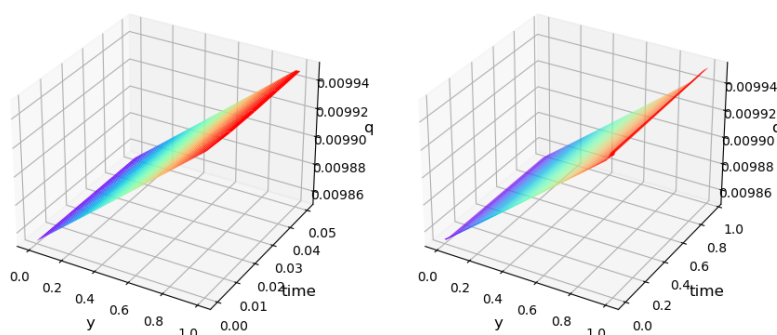


Рис. 3: Численные результаты для пространственного заряда q :
 $a = 0.01, b = 0.01$; метод I (слева), метод II (справа)

Численные результаты, полученные этими двумя методами, очень похожи, поэтому следующие выводы относительно влияния параметров a и b также совпадают. Значение параметра a влияет на степень искривления числовой функции:

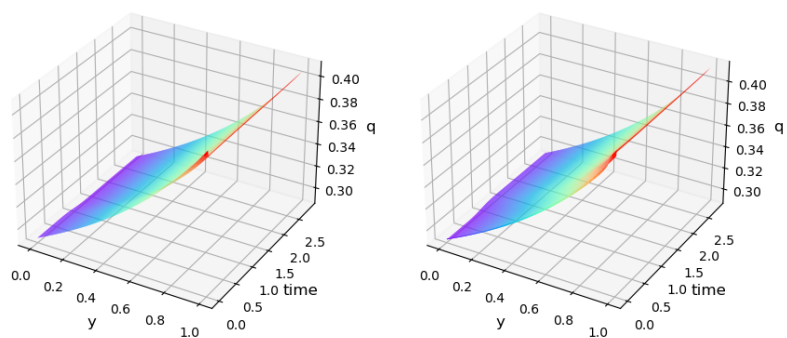


Рис. 4: Численные результаты для пространственного заряда q : $a = 0.5, b = 1$; метод I (слева), метод II (справа)

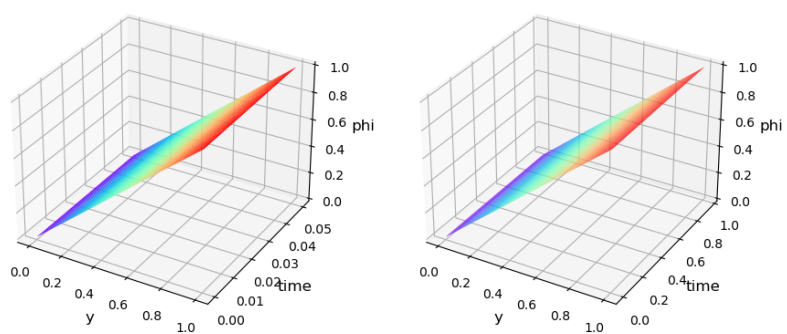


Рис. 5: Численные результаты определения электрического потенциала Φ : $a = 0.01, b = 0.01$; метод I (слева), метод II (справа)

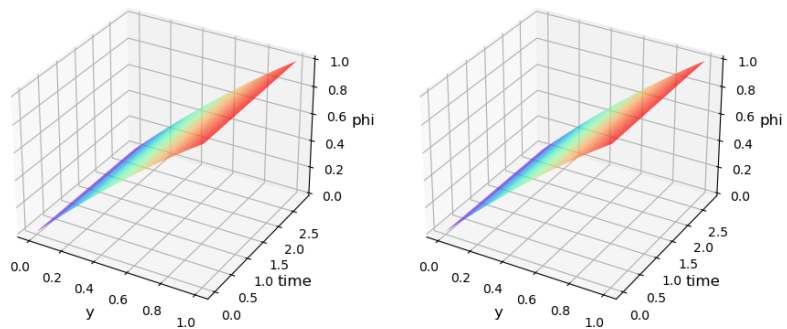


Рис. 6: Численные результаты определения электрического потенциала Φ : $a = 0.5, b = 1$; метод I (слева), метод II (справа)

чем больше значение a , тем больше становится степень искривления. Значение параметра b влияет на время остановки.

Метод II работает быстрее, но в этом методе параметр b не может быть равен 0 в соответствии с формулами (4.9)-(4.11). Метод I работает при $b = 0$; кроме того, при использовании этого метода численный процесс более стабилен и приводит к меньшим искажениям.

Таблица 2: *Количество временных итераций до стабилизации*

a	b	$\Lambda = 0$		$\Lambda = 1$		$\Lambda = 2$	
		метод I	метод II	метод I	метод II	метод I	метд II
0,01	0.01	3	15403	13593	19824	13593	19824
0.1	0.1	1968	4002	2838	3969	2836	4036
1	1	446	522	531	522	526	519
0.1	10	31	47	50	47	49	47
1	5	104	119	128	119	124	116

Заключение

В работе рассмотрена модифицированная модель Виноградова – Покровского, описывающая электрическую конвекцию слабопроводящей полимерной жидкости между горизонтальными слоями плоского бесконечного канала.

В предположении, что течение является течением типа Пуазейля, задача разбивается на две подзадачи. Для численного нахождения значений электрического потенциала и объемного заряда в работе были разработаны два подхода, получены формулы для проведения численных расчетов.

Начально–краевая задач для остальных компонент (скорости и симметрического тензора) будет исследована в дальнейшем.

Список литературы

- [1] Мордвинов А.Н., Смородин Б.Л. Электроконвекция при инжекции с катода и нагреве сверху // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2012. Т. 141, № 5. С. 997–1005.
- [2] Тараут А.В., Смородин Б.Л. Электроконвекция при наличии автономной униполярной инжекции и остаточной проводимости // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2012. Т. 142, № 2. С. 403–412.
- [3] Смородин Б.Л., Тараут А.В. Динамика волновых электроконвективных течений в модулированном электрическом поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2014. Т. 145, № 1. С. 180–188.
- [4] Картавых Н.Н., Смородин Б.Л., Ильин В.А. Параметрическая электроконвекция слабопроводящей жидкости в горизонтальном плоском конденсаторе // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2015. Т. 148, № 1. С. 178–189.

- [5] Некрасов О.О., Картавых Н.Н. Нелинейные колебания слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле в рамках маломодового приближения // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2024. Т. 165, № 6. С. 848–856.
- [6] Блохин А.М., Ткачев Д.Л. Линейная асимптотическая неустойчивость стационарного течения полимерной среды в плоском канале в случае периодических возмущений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2014. Т. 17, № 3. С. 13–25.
- [7] Блохин А.М., Егитов А.В., Ткачев Д.Л. Асимптотика спектра для линеаризованной задачи об устойчивости стационарных течений несжимаемой полимерной жидкости с объёмным зарядом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58, № 1. С. 108–122.
- [8] Блохин А.М., Ткачев Д.Л. Устойчивость аналога течения Пуазейля в МГД модели несжимаемой полимерной жидкости // Математический сборник. 2020. № 7. С. 3–23.
- [9] Блохин А.М., Семисалов Б.В. Нахождение стационарных течений пуазейлевского типа для несжимаемой полимерной жидкости методом установления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 2. С. 305–319.
- [10] Tkachev D.L. The spectrum and Lyapunov linear instability of the stationary state for polymer fluid flows: the Vinogradov- Pokrovsky model // Siberian Mathematical Journal. 2023. Vol. 64, № 2. Pp. 407–423.
- [11] Bird R.B., Dotson P.J., Johnson N.L. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1980. № 2/3. Pp. 213–235.
- [12] Chilcott M.D., Rallison J.M. Creeping flow of dilute polymer solutions past cylinders and spheres // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1988. Vol. 29, № 3. Pp. 381–432.
- [13] Remmelgas J., Harrison G., Leal L.G. A differential constitutive equation for entangled polymer solutions // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1999. Vol. 80, № 2. Pp. 115–134.
- [14] Покровский В.Н. Статистическая механика разбавленных суспензий. Москва: Наука, 1978.
- [15] Головичева Н.Э., Зинович С.А., Пышнограй Г.В. Влияние молекулярной массы на сдвиговую и продольную вязкость линейных полимеров // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, № 2. С. 154–160.
- [16] Pyshnograï G., Merzlikina D., Filip P., Pivokonsky R. Mesoscopic single and multi-mode rheological models for polymeric melts viscometric flows description // WSEAS transactions on heat and mass transfer. 2018. Vol. 13. Pp. 49–65.

- [17] Алтухов Ю.А., Гусев А.С., Пышнограй Г.В. Введение в мезоскопическую теорию текучести полимерных систем. Барнаул: АлтГПА, 2012.
- [18] Блохин А.М., Рудометова А.С. Стационарные решения уравнений, описывающих неизотермическую электроконвекцию слабопроводящей несжимаемой полимерной жидкости // Сибирский журнал индустриальной математики. 2015. Т. 18, № 1(61). С. 3–13.
- [19] Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Издательство Гостехиздат, 1955.
- [20] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
- [21] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
- [22] Блохин А.М., Семисалов Б.В., Шевченко А.С. Стационарные решения уравнений, описывающих неизотермические течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости // Математическое моделирование. 2016. Т. 28, № 10. С. 3–22.
- [23] Блохин А. М., Семисалов Б. В. Стационарное течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с эллиптическим сечением // Сибирский журнал индустриальной математики. 2014. Т. XVII, № 4(60). С. 38–47.
- [24] Бронштейн И.Н., Семендяев К.К. Справочник по математике. М.: Наука, 1964.

Образец цитирования

Мищенко Е.В., Гуань С. О численном нахождении объемного заряда и электрического потенциала в нестационарных ЭГД течениях несжимаемых полимерных жидкостей // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 1. С. 33–50. <https://doi.org/10.26456/vtppmk727>

Сведения об авторах

1. Мищенко Евгения Васильевна

инженер-исследователь Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4, ИМ СО РАН.

E-mail: eugenia-m@academ.org

2. Гуань Сюлинь

аспирантка кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета Новосибирского государственного университета.

Россия, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова 1, НовГУ. E-mail: s.guan@g.nsu.ru

NUMERICAL CALCULATION OF SPACE CHARGE AND ELECTRIC POTENTIAL IN NONSTATIONARY ELECTROHYDRODYNAMICAL FLOWS OF INCOMPRESSIBLE POLYMER FLUID

Mishchenko E.V.*, Guan X.**

*IM SB RAS, Novosibirsk

**Novosibirsk State University, Novosibirsk

Received 21.01.2025, revised 04.03.2025.

The aim of the paper is to obtain numerical formulae and calculate the space charge and electric potential in nonstationary EHD flows of the Poiseuille type incompressible polymer fluid. The paper is based on a variant of the Pokrovsky-Vinogradov rheological model. This model describes the fluid flow in a flat channel. The equations in the model are non-linear, and the explicit form of solution hardly can be found. Thus, finding a numerical solution to this problem becomes an actual reality. To find two components, namely, the space charge and the electric potential, the authors proposes two grid schemes and then obtains numerical solutions for different values of the problem parameters.

Keywords: incompressible polymer fluid in channel, Poiseuille flow, numerical solution, grid scheme, space charge, electric potential.

Citation

Mishchenko E.V., Guan X., “Numerical calculation of space charge and electric potential in nonstationary electrohydrodynamical flows of incompressible polymer fluid”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2025, № 1, 33–50 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk727>

References

- [1] Mordvinov A.N., Smorodin B.L., “Electroconvection by injection from the cathode and heating from above”, *Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]*, **141**:5 (2012), 997–1005 (in Russian).
- [2] Taraut A.V., Smorodin B.L., “Electroconvection in the presence of autonomous unipolar injection and residual conductivity”, *Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]*, **142**:2 (2012), 403–412 (in Russian).
- [3] Smorodin B.L., Taraut A.V., “Dynamics of electroconvective wave flows in a modulated electric field”, *Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]*, **145**:1 (2014), 180–188 (in Russian).

- [4] Kartavy'kh N.N., Smorodin B.L., Il'in V.A., "Parametric electroconvection of a weakly conductive liquid in a horizontal flat capacitor", *Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]*, **148**:1 (2015), 178–189 (in Russian).
- [5] Nekrasov O.O., Kartavy'kh N.N., "Nonlinear oscillations of a weakly conducting liquid in an alternating electric field within the framework of the low-mode approximation", *Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]*, **165**:6 (2024), 848–856 (in Russian).
- [6] Blokhin A.M., Tkachev D.L., "Linear asymptotic instability of the stationary flow of a polymer medium in a flat channel in the case of periodic disturbances", *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki [Siberian Journal of Industrial Mathematics]*, **17**:3 (2014), 13–25 (in Russian).
- [7] Blokhin A.M., Egitov A.V. Tkachev D.L., "The asymptotics of the spectrum for the linearized problem of stability of stationary flows of an incompressible polymer liquid with a volume charge", *Zhurnal vy'chislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]*, **58**:1 (2018), 108–122 (in Russian).
- [8] Blokhin A.M., Tkachev D.L., "Stability of the Poiseuille flow analog in the MHD model of an incompressible polymer liquid", *Matematicheskij sbornik [Mathematical collection]*, 2020, № 7, 3–23 (in Russian).
- [9] Blokhin A.M., Semisalov B.V., "Finding stationary Poiseuille-type flows for an incompressible polymer liquid by establishing", *Zhurnal vy'chislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]*, **62**:2 (2022), 305–319 (in Russian).
- [10] Tkachev D.L., "The spectrum and Lyapunov linear instability of the stationary state for polymer fluid flows: the Vinogradov- Pokrovsky model", *Siberian Mathematical Journal*, **64**:2 (2023), 407–423.
- [11] Bird R.B., Dotson P.J., Johnson N.L., "Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1980, № 2/3, 213–235.
- [12] Chilcott M.D., Rallison J.M., "Creeping flow of dilute polymer solutions past cylinders and spheres", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **29**:3 (1988), 381–432.
- [13] Remmelgas J., Harrison G., Leal L.G., "A differential constitutive equation for entangled polymer solutions", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **80**:2 (1999), 115–134.
- [14] Pokrovskij V.N., *Statisticheskaya mekhanika razbavlenny'kh suspenzij [Statistical mechanics of dilute suspensions]*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (in Russian).
- [15] Golovicheva N.E., Zinovich S.A., Py'shnograj G.V., "Influence of molecular weight on shear and longitudinal viscosity of linear polymers", *Prikladnaya mekhanika i*

- tekhnicheskaya fizika [Applied mechanics and technical physics]*, **41**:2 (2000), 154–160 (in Russian).
- [16] Pyshnograï G., Merzlikina D., Filip P., Pivokonsky R., “Mesoscopic single and multi-mode rheological models for polymeric melts viscometric flows description”, *WSEAS transactions on heat and mass transfer*, **13** (2018), 49–65.
 - [17] Altukhov Yu.A., Gusev A.S., Py’shnograj G.V., *Vvedenie v mezoskopicheskuyu teoriyu tekuchesti polimerny’kh sistem [Introduction to the mesoscopic theory of polymer system fluidity]*, AltGPA, Barnaul, 2012 (in Russian).
 - [18] Blokhin A.M., Rudometova A.S., “Stationary solutions of equations describing non-isothermal electroconvection of a weakly conductive incompressible polymer liquid”, *Sibirskij zhurnal industrial’noj matematiki [Siberian Journal of Industrial Mathematics]*, **18**:1(61) (2015), 3–13 (in Russian).
 - [19] Slezkin N.A., *Dinamika vyazkoj neszimaemoj zhidkosti [Dynamics of a viscous incompressible fluid]*, Izdatel’sтво Gostekhizdat, Moscow, 1955 (in Russian).
 - [20] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.
 - [21] Yanenko N.N., *Metod drobny’kh shagov resheniya mnogomerny’kh zadach matematicheskoy fiziki [Fractional step method for solving multidimensional problems in mathematical physics]*, Nauka, Novosibirsk, 1967 (in Russian).
 - [22] Blokhin A.M., Semisalov B.V., Shevchenko A.S., “Stationary solutions of equations describing nonisothermal flows of an incompressible viscoelastic polymer liquid”, *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical modeling]*, **28**:10 (2016), 3–22 (in Russian).
 - [23] Blokhin A. M., Semisalov B. V., “Stationary flow of an incompressible viscoelastic polymer liquid in a channel with an elliptical cross section”, *Sibirskij zhurnal industrial’noj matematiki [Siberian Journal of Industrial Mathematics]*, **XVII**:4(60) (2014), 38–47 (in Russian).
 - [24] Bronshtejn I.N., Semendyaev K.K., *Spravochnik po matematike [Handbook of Mathematics]*, Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).

Author Info

1. Mishchenko Evgenia Vasilievna

Researcher at Sobolev Institute of Mathematics.

Russia, 630090, Novosibirsk, Koptiyuga, 4, IM SB RAS.

E-mail: eugenia-m@academ.org

2. Guan Xuelin

PhD student at Novosibirsk State University.

Russia, 630090, Novosibirsk, Pirogova str., 1, NovSU. E-mail: s.guan@g.nsu.ru