СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 005.932

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ НА ПРОИЗВОДСТВЕННОМ ПРЕДПРИЯТИИ ПРИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СПРОСА, ПОСТАВКИ И ХРАНЕНИЯ

Соломаха Г.М.[*], Тулуева В.А.[**], Хижняк С.В.[***]
[*]Тверской государственный университет, г. Тверь
[**]АО «Диэлектрические кабельные системы», г. Тверь
[***]ООО "ИТМ", г. Краснодар

Поступила в редакцию 24.01.2025, после переработки 20.03.2025.

Представлены детерминированные модели управления запасами ресурсов, необходимых для выпуска продукции на производственном предприятии, при изменяющихся характеристиках спроса, поставки и хранения, которые являются развитием модели Уилсона управления запасами. Получены аналитические выражения для нахождения объема поставок и интервалов между поставками в этих условиях.

Ключевые слова: производственные запасы, управление запасами, страховой запас, издержки на поставку, издержки на хранение запасов.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 1. С. 51–66.
https://doi.org/10.26456/vtpmk729

Введение

При планировании производства продукции на производственном предприятии важную роль играет система управления запасами ресурсов, то есть сырья и материалов, используемых для выпуска продукции. Так, отсутствие требуемых ресурсов, получаемых от поставщиков, может привести к нарушению или полной остановке производственного процесса. В свою очередь, чрезмерно большой запас требуемых для производства продукции ресурсов приводит к росту издержек на их хранение. Поэтому возникает необходимость разработки экономико-математических моделей управления запасами, предназначенных для определения промежутков времени между поставками ресурсов и объемов этих поставок. Условия поставок и хранения ресурсов зависят от множества факторов (спроса, скидок, использования страхового запаса и др.), которые в сою очередь могут иметь разный вид и параметры. В связи с этим информационная система предприятия должна обеспечивать решение задачи управления запасами ресурсов для широкого диапазона условий и значений соответствующих параметров. Надо подчеркнуть, что фактически каждому набору указанных условий и параметров должна соответствовать определенная конкретная модель. Поэтому, хотя к настоящему времени и разработано большое количество экономико-математических моделей управления запасами на предприятиях, приведенных, например, в [1-8], разработка новых видов моделей управления запасами на предприятиях является актуальной.

Модели управления запасами можно разделить на детерминированные и стохастические, причем стохастические модели предполагают, как правило, использование функции распределения спроса на продукцию в будущие периоды. Далее будем рассматривать детерминированные модели управления запасами.

Целью работы является разработка обобщенных моделей Уилсона, позволяющих повысить эффективность систем управления запасами ресурсов на производственном предприятии за счет управления запасами при изменяющихся характеристиках спроса, поставки и хранения.

1. Основные результаты

1.1. Модель управления запасами ресурсов при постоянных характеристиках спроса, поставки и хранения

В качестве базовой модели управления запасами рассмотрим следующую однономенклатурную модель управления запасами [3], которую часто называют моделью Уилсона.

Пусть временной промежуток планирования поставок ресурсов - это отрезок $[0, T]$. Введем следующие обозначения: S - объем поставляемой партии ресурса, при этом считаем, что все поставки одного объема; Δt - интервал времени между поставками; n - количество поставок за временной диапазон $[0, T]$; C - затраты на хранение единицы запасов в единицу времени; Q - необходимый объем рассматриваемого ресурса для обеспечения выпуска продукции предприятием во временной период $[0, T]$; D - издержки на поставку одной партии ресурса от некоторого конкретного поставщика на данное предприятие. Также в этой модели полагается, что расходование ресурса происходит равномерно в течение рассматриваемого временного периода, причем отсутствие запасов этого ресурса на предприятии не допускается. Считается, что поставка следующей партии ресурса осуществляется в момент, когда будут израсходованы его запасы, полученные при предыдущей поставке.

В этой модели в качестве неизвестных выступают S, Δt и n, а T, C, D и Q - заданные постоянные величины. При выполнении допущений модели Уилсона имеют место соотношения

$$n = \frac{T}{\Delta t} = \frac{Q}{S}. \tag{1}$$

При таких условиях, исходя из минимизации суммарных издержек на поставку и хранение запасов (сырья или комплектующих), оптимальный объем поставок находится по формуле [3]

$$S = \sqrt{\frac{2 \cdot Q \cdot D}{C \cdot T}}. \tag{2}$$

Формулу (2) обычно называют формулой Уилсона. Тогда из (1) следует, что промежуток времени между поставками

$$\Delta t = \frac{T \cdot S}{Q} = \sqrt{\frac{2D \cdot T}{C \cdot Q}}. \tag{3}$$

На основе анализа допущений и параметров модели Уилсона можно сделать следующие выводы.

1. Величину T, задающую величину промежутка времени планирования процесса управления запасами используемого в производстве ресурса, можно определить, исходя из договорных обязательств предприятия или анализа и прогнозирования спроса на выпускаемую предприятием продукцию.

2. Величина Q, т.е. суммарный требуемый уровень ресурса за временной промежуток $[0, T]$, находится, исходя из объемов заказов продукции у предприятия, а также его технологических возможностей по производству продукции.

3. Допущение о равномерном расходовании запасов поставляемого ресурса правомерно, если за временной горизонт планирования не заключаются новые договора на поставку выпускаемой предприятием продукции. В противном случае требуется уточнение модели.

4. Требование о недопустимости отсутствия запасов ресурса, поставляемого на предприятие, является естественным, поскольку его нарушение недопустимо для стабильно функционирующего предприятия, а тем более для предприятий с непрерывной системой производства. Однако в теоретическом плане рассматриваются и модели [3] управления запасами с дефицитом в предположении, что предприятие из-за неудовлетворенного спроса на производственный ресурс несет убытки.

5. Предположение о постоянстве D, то есть издержек на поставку партии производственного ресурса, вне зависимости от объема поставляемой партии является существенным. Оно обычно на практике не выполняется.

6. Допущение о постоянстве C, то есть затрат на хранение единицы запасов поставляемого ресурса в единицу времени, вне зависимости от объема хранимых запасов часто не выполняется.

7. Фактически подразумевается, что конкретный поставщик производственного ресурса определен заранее. Однако в условиях конкуренции между поставщиками рассматриваемого ресурса может оказаться, что в зависимости от объема поставляемой партии ресурса более выгодными являются разные поставщики.

8. Модель Уилсона является однономенклатурной, то есть рассматривается управление запасами одного поставляемого производственного ресурса. В большинстве случаев предприятию приходится иметь дело не с одним видом поставляемого производственного ресурса, а с несколькими. Поэтому возникает необходимость рассмотрения многономенклатурной модели управления запасами.

9. В классической модели Уилсона не вводится страховой запас. Однако в силу разных обстоятельств (задержка в поставке или некондиционность ресурса) при практическом использовании этой модели может возникнуть дефицит ресурса. Поэтому часто вводится страховой запас поставляемого ресурса, чтобы исключить возможность его дефицита даже в этих случаях.

Перейдем к рассмотрению обобщенных моделей Уилсона, позволяющих устранить указанные выше недостатки.

1.2. Модель управления запасами при наличии страховых запасов

В отличие от базовой модели Уилсона будем считать, что используется страховой запас производственного ресурса объемом A. Тогда в каждый момент времени уровень запасов должен быть не меньше, чем A. Первая поставка объемом $S + A$ осуществляется в момент $t = 0$, а остальные - через промежутки времени длиной Δt в объеме S. Тогда затраты на поставку первой, а также каждой из последующих $(n - 1)$ партий ресурса равны D, суммарные затраты на хранение страхового запаса в период времени $[0, T]$ равны $A \cdot T \cdot C$. Поскольку для каждого цикла поставок в начальный момент запасы равны $S + A$, в конечный момент они равны страховому запасу A, а расходование запасов происходит равномерно, то число хранимых нестраховых запасов в каждом цикле поставок равно площади прямоугольного треугольника с катетами равными S и Δt, то есть $0,5 \cdot S \cdot \Delta t$. Соответственно, затраты на хранение нестраховых запасов в каждом цикле составят $0,5 \cdot S \cdot \Delta t \cdot C$. В итоге суммарные издержки на поставку ресурса и его хранение за период времени $[0, T]$ равны

$$Z(S) = n \cdot D + 0,5 \cdot n \cdot S \cdot \Delta t \cdot C + A \cdot T \cdot C$$

или с учетом (1)

$$Z(S) = \frac{Q}{S} \cdot D + 0,5 \cdot T \cdot S \cdot C + A \cdot T \cdot C. \qquad (4)$$

Тогда величина объема поставки S находится из условия минимизации функции (4). Поскольку производная этой функции равна

$$Z'(S) = -\frac{Q}{S^2} \cdot D + 0,5 \cdot T \cdot C,$$

то необходимое условие минимума функции (4) примет вид

$$-\frac{Q}{S^2} \cdot D + 0,5 \cdot T \cdot C = 0. \qquad (5)$$

Решая уравнение (5) относительно S, находим оптимальный объем поставки производственного ресурса

$$S = \sqrt{\frac{2 \cdot Q \cdot D}{C \cdot T}},$$

который совпадает с (2). Соответственно, промежуток времени Δt между поставками определяется выражением (3). Отметим, что необходимое условие минимума функции (4) является и достаточным, поскольку вторая производная функции (4)

$$Z''(S) = 2 \cdot Q \cdot D \cdot S^{-3}$$

положительна.

Таким образом, введение страхового запаса не меняет схемы поставок по сравнению с базовой моделью, просто объем первой поставки необходимо увеличить на величину страхового запаса A производственного ресурса.

1.3. Управление запасами при степенной зависимости стоимости поставки от ее объема

Положим, что допущение 5 не выполнено, то есть стоимость D поставки партии ресурса зависит от объема поставки S, причем эта зависимость степенная:

$$D(S) = \alpha \cdot S^{\beta}, \tag{6}$$

где α — издержки на поставку партии ресурса при $S = 1$, т.е. единичной партии ресурса, а β удовлетворяет неравенству $0 \leq \beta < \beta_0$, где $\beta_0 < 1$, При этом ясно, что $\beta = 0$ означает наличие допущения 5.

Кроме того считаем, что используется страховой запас объемом А, то есть недопустим текущий наличный запас ресурса меньший, чем А.

В этом случае суммарные издержки на поставку ресурса и его хранение за период времени $[0, T]$ равны

$$Z(S) = n \cdot D(S) + n \cdot S \cdot \Delta t \cdot C/2. \tag{7}$$

Выражение (7) с учетом (1) и (6) примет следующий вид:

$$Z(S) = \alpha \cdot Q \cdot S^{\beta-1} + S \cdot T \cdot C/2. \tag{8}$$

Объем поставки S ищем из решения задачи минимизации $Z(S)$. В соответствии с этим найдем выражение для производной функции $Z(S)$ из (8)

$$Z'(S) = \alpha \cdot Q \cdot (\beta - 1)S^{\beta-2} + T \cdot C/2,$$

которое приравняем к нулю. Приходим к уравнению относительно S

$$\alpha \cdot Q \cdot (\beta - 1)S^{\beta-2} + T \cdot C/2 = 0,$$

из последнего получим объем поставляемой партии производственного ресурса

$$S_0 = \left(\frac{T \cdot C}{2 \cdot (1-\beta) \cdot \alpha \cdot Q}\right)^{1/(\beta-2)}. \tag{9}$$

Поскольку $Z^{''\beta-3}$ при $0 \leq \beta < \beta_0$, то для S_0, определяемого выражением (9), выполнено достаточное условие минимума, состоящее в положительности второй производной функции $Z(S)$. Следовательно выражение (9) определяет объем поставки, обеспечивающий минимальные суммарные затраты на поставку производственного ресурса и его хранение за период времени$[0, T]$.

Отметим, что при $\beta = 0$ (то есть при верности допущения 5) выражение (9) преобразуется в формулу Уилсона (2).

При использовании страхового запаса объемомA и степенной зависимости вида (6) затрат на поставку партии ресурса от ее объема суммарные затраты на поставку и хранение запасов составят

$$Z(S) = D(S + A) + (n - 1) \cdot D(S) + S \cdot T \cdot C/2 + T \cdot A \cdot C, \tag{10}$$

поскольку первая поставка осуществляется в объеме $S + A$, а остальные - в объеме S через промежутки времени длиной Δt. С учетом (1) и (6) выражение (10), которое необходимо минимизировать, приводится к виду

$$Z(S) = \alpha(S + A)^{\beta} + \alpha(\frac{Q}{S} - 1) \cdot S^{\beta} + 0,5 \cdot S \cdot T \cdot C + T \cdot A \cdot C.$$

Приравнивая к 0 производную функции $Z(S)$, получим уравнение для нахождения оптимальной величины S

$$\alpha\beta(S + A)^{\beta-1} + \alpha \cdot (\beta - 1) \cdot Q \cdot S^{\beta-2} - \alpha \cdot \beta \cdot S^{\beta-1} + 0,5 \cdot T \cdot C = 0. \tag{11}$$

1.4. Модель управления запасами при степенной зависимости стоимости хранения от объема хранимых запасов

Пусть в отличие от базовой модели Уилсона издержки C_1 на хранение запасов в единицу времени зависят от объема хранимых запасов X, а эта зависимость степенная

$$C_1(X) = \gamma \cdot X^{\delta}, \tag{12}$$

где γ - базовая стоимость хранения единицы запасов в единицу времени, а δ удовлетворяет условию $\delta_0 < \delta \leq 1$, где $\delta_0 > 0$. При этом значение $\delta = 1$ соответствует наличию допущения 6 о линейной зависимости издержек на хранение запасов от их объема.

Тогда суммарные издержки на поставку производственного ресурса и его хранение за период времени $[0, T]$ при отсутствии страхового запаса составят

$$Z(S) = \frac{Q \cdot D}{S} + n \cdot \int_0^{\Delta t} \gamma \left(S - \frac{t}{\Delta t} S\right)^{\delta} dt, \tag{13}$$

где интеграл определяет площадь прямоугольного криволинейного треугольника с катетами γS^{δ} и Δt и численно равен издержкам на хранение запасов в одном временном цикле пополнения запасов длиной Δt. После вычисления интеграла в (13) имеем

$$Z(S) = \frac{Q \cdot D}{S} + \frac{\Delta t \cdot \gamma}{\delta + 1} n \cdot S^{\delta}.$$

Учитывая (1), окончательно получим

$$Z(S) = \frac{Q \cdot D}{S} + \frac{T \cdot \gamma}{\delta + 1} S^{\delta}. \tag{14}$$

Объем поставки S найдем, решая задачу минимизации выражения $Z(S)$, определяемого (14). Поскольку производная функции $Z(S)$ имеет вид

$$Z'(S) = -\frac{Q \cdot D}{S^2} + \frac{T \cdot \gamma \cdot \delta}{\delta + 1} S^{\delta-1},$$

то, приравнивая ее нулю, получим следующее уравнение относительно S:

$$-\frac{Q \cdot D}{S^2} + \frac{T \cdot \gamma \cdot \delta}{\delta + 1} S^{\delta - 1} = 0. \tag{15}$$

В результате решения (15) определяется объем поставки в каждом цикле поставки

$$S_0 = \left(\frac{Q \cdot D \cdot (\delta + 1)}{T \cdot \gamma \cdot \delta} \right)^{1/(\delta+1)}. \tag{16}$$

При этом из анализа вида функции в (14) можно сделать вывод, что при значении S_0, определяемом (16), получим наименьшие суммарные издержки на поставку и хранение запасов за период времени $[0, T]$. Отметим, что при $\delta = 1$ выражение (16) сводится к (2), то есть к формуле Уилсона. Этого можно было ожидать, так как $\delta = 1$ в (12) соответствует случаю выполнения допущения 6 из раздела 1.1.

При использовании страхового запаса поставляемого производственного ресурса объемом A суммарные издержки на поставку материалов и их хранение за период времени $[0, T]$ равны

$$Z(S) = \frac{Q \cdot D}{S} + n \cdot \int_0^{\Delta t} \gamma \left(S + A - \frac{t}{\Delta t} S \right)^{\delta} dt. \tag{17}$$

После интегрирования выражение (17) преобразуется к виду

$$Z(S) = \frac{Q \cdot D}{S} + \frac{T \cdot \gamma}{S(\delta + 1)} [(S + A)^{\delta+1} - A^{\delta+1}]. \tag{18}$$

Для нахождения минимума $Z(S)$ и соответствующей точки минимума S_0, то есть оптимального объема поставки ресурса, можно поступить как при нахождении минимума функции (10): найти производную$Z'(S)$, затем приравняв ее нулю и получить уравнение аналогичное (11), которое решается численными методами.

1.5. Модель управления запасами при степенных зависимостях стоимости хранения от объема хранимых запасов и стоимости поставки от ее объема

Теперь избавляемся от допущений 5 и 6 модели Уилсона, считая, что стоимость поставки партии производственного ресурса D зависит от объема поставки S и имеет вид (6), а издержки на хранение запасов в единицу времени C_1 зависят от их объемаXи определяются степенной зависимостью (12).

При отсутствии страхового запаса в этом случае суммарные издержки на поставку производственного ресурса и его хранение за временной период $[0, T]$ равны

$$Z(S) = Q \cdot \alpha \cdot S^{\beta - 1} + n \cdot \gamma \cdot \int_0^{\Delta t} \left(S - \frac{t}{\Delta t} S \right)^{\delta} dt. \tag{19}$$

Выражение (19) после интегрирования примет вид

$$Z(S) = Q \cdot \alpha \cdot S^{\beta - 1} + \frac{T \cdot \gamma}{\delta + 1} S^{\delta}. \tag{20}$$

Тогда необходимое условие минимума функции (20) представляется равенством
$$\frac{Q\cdot\alpha\cdot(\beta-1)}{S^{2-\beta}}+\frac{T\cdot\gamma\cdot\delta}{\delta+1}S^{\delta-1}=0. \tag{21}$$

Решая уравнение (21), определяем оптимальный объем поставляемой партии ресурса
$$S_0=\left(\frac{Q\cdot\alpha\cdot(1-\beta)\cdot(\delta+1)}{T\cdot\gamma\cdot\delta}\right)^{1/(\delta-\beta+1)}. \tag{22}$$

Как и в других рассматриваемых моделях управления запасами промежуток времени между поставками Δt при найденном объеме поставки S_0 определяется, учитывая (1), следующим образом
$$\Delta t=\frac{T\cdot S_0}{Q}. \tag{23}$$

Отметим, что при наличии допущений 5 и 6, что соответствует значениям параметров модели $\beta=0$ и $\delta=1$, при $\alpha=D$ и $\gamma=C$ формула (22) предсказуемо сводится к формуле Уилсона (2).

При использовании страхового запаса размером A суммарные издержки в отличие от (19) составят
$$Z(S)=D(S+A)+(n-1)D(S)+n\cdot\int_0^{\Delta t}\gamma\left(S+A-\frac{t}{\Delta t}S\right)^{\delta}dt. \tag{24}$$

После интегрирования выражение (24) приводится к виду
$$Z(S)=\alpha(S+A)^{\beta}+\alpha\left(\frac{Q}{S}-1\right)S^{\beta}+\frac{T\cdot\gamma}{S(\delta+1)}[(S+A)^{\delta+1}-A^{\delta+1}]. \tag{25}$$

Далее решается задача минимизации выражения (25).

1.6. Управление запасами производственного ресурса при допустимости его дефицита и степенной зависимости затрат на поставку партии от ее объема

В теоретическом плане, например в [3], рассматривается случай допустимости дефицита производственного ресурса, то есть допускается его отсутствие, но при этом предприятие несет потери от неудовлетворенного спроса на него. Тогда выражение для суммарных затрат на поставку и хранение ресурса имеет вид [3]
$$Z(S,V)=n\cdot D(S)+n\cdot S\cdot\Delta t_1\cdot C/2+n\cdot(V-S)\cdot\Delta t_2\cdot C_H/2, \tag{26}$$
где V - объем производственного ресурса, требуемый в промежутке времени Δt между поставками; Δt_1 - временной интервал из промежутка Δt, в течение которого запасы ресурса присутствуют; Δt_2- временной интервал из промежутка Δt, в течение которого запасы ресурса отсутствуют; C_H- потери предприятия из-за отсутствия единицы производственного ресурса в единицу времени.

В [3] показано, что в условиях базовой модели Уилсона, выражение (26) приводится к виду

$$Z(S,V)=\frac{Q}{V}\cdot D(S)+\frac{S^2\cdot T\cdot C}{2V}+\frac{(V-S)^2\cdot T\cdot C_H}{2V}. \tag{27}$$

При степенной зависимости вида (6) издержек на поставку ресурса от объема поставляемой партии формула (27) примет вид

$$Z(S,V)=\frac{Q}{V}\cdot\alpha\cdot S^{\delta}+\frac{S^2\cdot T\cdot C}{2V}+\frac{(V-S)^2\cdot T\cdot C_H}{2V}, \tag{28}$$

а значения S и V, обеспечивающие минимум (28), находятся из решения системы уравнений, имеющей вид

$$\begin{cases} Z'_S(S,V)=\frac{Q}{V}\alpha\cdot\delta\cdot S^{\delta-1}+\frac{S\cdot T\cdot C}{V}-\frac{(V-S)\cdot T\cdot C_H}{V}=0,\\ Z'_V(S,V)=-\frac{Q\cdot\alpha\cdot S^{\delta}}{V^2}-\frac{S^2\cdot T\cdot C}{2V^2}+\frac{T\cdot C_H\cdot\left(2V\cdot(V-S)-(V-S)^2\right)}{2V^2}=0.\end{cases}$$

1.7. Управление запасами при ступенчатом виде зависимости стоимости поставки от ее объема

При поставке производственных ресурсов часто используется ступенчатый вид функции $D(S)$, в частности, выбирается три диапазона изменения объема поставляемой партии ресурса: малый, средний и крупный. Тогда каждому из этих диапазонов соответствует своя цена поставки. Пусть малая партия поставки имеет объем S, который не превышает N_1 единиц ресурса, объем крупной партии не менее N_2 единиц, а объем средней партии больше N_1 и меньше N_2 единиц поставляемого производственного ресурса.

Введем следующие множества: $R_1=\{S: S\le N_1\}$, $R_2=\{S: N_1<S<N_2\}$ и $R_3=\{S: S\ge N_2\}$, которые определяют соответственно малую, среднюю и крупную партии поставляемого ресурса.

Тогда функция стоимости поставки в зависимости от ее объема имеет ступенчатый вид

$$D(S)=\begin{cases} D_1, \text{ если } S\in R_1,\\ D_2, \text{ если } S\in R_2,\\ D_3, \text{ если } S\in R_3,\end{cases} \tag{29}$$

где, очевидно, выполнено $D_1<D_2<D_3$.

Суммарные затраты на поставку и хранение запасов составят

$$Z(S)=Q\cdot S^{-1}\cdot D(S)+0,5\cdot S\cdot T\cdot C, \tag{30}$$

соответственно объем S поставляемой партии ресурса в этом случае находится из условия

$$\min_{1\le i\le 3}\min_{S\in R_i} Z(S). \tag{31}$$

При этом внутренние минимумы в (31) достигаются во внутренней или граничной точке соответствующего значению i диапазона R_i объема партии.

Заметим, что при двухступенчатой функции стоимости поставки $D(S)$ объем S поставляемой партии материала находится из условия $\min_{1\le i\le 2}\min_{S\in R_i} Z(S)$, где $R_1=\{S:S<N_1\}$,$R_2=\{S:S\ge N_1\}$, а функция стоимости поставки в зависимости от ее объема в отличие от (29) имеет вид

$$D(S)=\begin{cases}D_1, \text{ если } S\in R_1,\\ D_2, \text{ если } S\in R_2,\end{cases}$$

где выполнено условие $D_2>D_1$.

1.8. Выбор поставщика материалов в задаче управления запасами

В базовой модели Уилсона управления запасами рассматриваются поставки ресурса от одного поставщика. Пусть имеется J поставщиков производственного ресурса, каждый из которых устанавливает цены на ресурс в зависимости от объема поставляемой его партии. При этом число градаций объема партии (малый, средний, крупный и др.) и их границы могут отличаться у разных поставщиков. Обозначим через I_j число градаций объема партии у j -ого поставщика, а через D_i^jи R_i^j- соответственно значение стоимости поставки и диапазон изменения для i -ой градации объема партии ресурса у j -ого поставщика, где $1\le j\le J$, $1\le i\le I_j$. Тогда выбор поставщика j_0 и объема поставляемой партии $S_0(j_0)$ ресурса осуществляется из условия

$$\min_{1\le j\le J}\min_{1\le i\le I_j}\min_{S\in R_i^j} Z(S). \tag{32}$$

В (32) суммарные затраты $Z(S)$ на поставку и хранение ресурса определяются формулой (30), где $D(S)=D_i^j$ для конкретных значений i и j. В (32) минимум по S достигается во внутренней или граничной точке соответствующего значениям i и j диапазона R_i^j изменения объема партии поставляемого производственного ресурса.

1.9. Случай многономенклатурных запасов

Из множества возможных задач управления многономенклатурными запасами остановимся на случае, когда поставляются два вида производственных ресурсов от одного поставщика, однако приведенная ниже модель очевидным образом обобщается на случай большего числа поставляемых ресурсов и разных поставщиков их.

Обозначим через S_1 и S_2 объемы поставок соответственно первого и второго ресурса в начале первого цикла поставок длительностью Δt, а через f_1 иf_2 интенсивности использования ресурсов предприятием. Для определенности будем считать, что Δt определяется моментом обнуления запасов первого ресурса, а в момент времени $t=\Delta t$ второй поставки останутся запасы второго ресурса в объеме $S_2-f_2\cdot\Delta t$, причем выполнены соотношения

$$\Delta t=\frac{S_1}{f_1}, \tag{33}$$

$$n = \frac{Q_1}{S_1}, \tag{34}$$

где Q_1 — потребности в первом ресурсе за временной промежуток $[0, T]$.

Тогда вторая и последующие поставки осуществляются в объеме S_1 для первого ресурса и $f_2 \cdot \Delta t$ для второго ресурса. При этом в начале каждого цикла поставок, в том числе и первого, запасы равны S_1 и S_2 соответственно для первого и второго ресурса. Затраты на хранение первого ресурса в одном цикле поставок составляют $0,5 \cdot S_1 \cdot \Delta t \cdot C_1$, а второго ресурса $0,5 \cdot f_2 \cdot (\Delta t)^2 \cdot C_2 + (S_2 - f_2 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \cdot C_2$, где C_1 и C_2 - затраты на хранение единицы запасов в единицу времени для первого и второго ресурса соответственно.

Суммарные затраты на хранение всех производственных ресурсов за промежуток времени $[0, T]$, то есть за n циклов поставок, равны

$$Z_X(S_1, S_2) = n[0,5 \cdot \Delta t \cdot S_1 \cdot C_1 + 0,5 \cdot f_2 \cdot (\Delta t)^2 \cdot C_2 + (S_2 - f_2 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \cdot C_2], \tag{35}$$

а суммарные затраты на поставку ресурсов составляют

$$Z_D(S_1, S_2) = D(S_1, S_2) + (n-1) \cdot D(S_1, f_2 \cdot \Delta t). \tag{36}$$

В (36) затраты на поставку партии ресурсов $D(S_1, S_2)$ могут, например, быть постоянными (как в разделе 1.2), степенного вида (как в разделе 1.3) или ступенчатого вида (как в разделе 1.7).

Учитывая (33)-(36), формула для расчета суммарных затрат на поставку и хранение всех производственных ресурсов за промежуток времени $[0, T]$ примет следующий вид

$$Z(S_1, S_2) = D(S_1, S_2) + \left(\frac{Q_1}{S_1} - 1\right) \cdot D\left(S_1, \frac{f_2 \cdot S_1}{f_1}\right) + \\ + 0,5 \cdot T \cdot S_1 \cdot C_1 + T \cdot C_2 \cdot \left(S_2 - \frac{f_2}{f_1} S_1\right). \tag{37}$$

В результате решения задачи минимизации функции (37) определяются объемы поставок производственных ресурсов, а также по формуле (33) промежуток времени между поставками.

1.10. Управление запасами при изменении спроса на производственный ресурс

В рамках временного периода планирования $[0, T]$ возможно изменение спроса на производственный ресурс. Например, будет принято решение о расширении производства продукции на предприятии. Пусть для определенности сначала положим, что это изменение спроса происходит в момент очередной поставки ресурса и соответствует времени t_1. Тогда для оставшегося промежутка планирования $[t_1, T]$ находим требуемый объем Q_N поставляемого ресурса. Затем, используя соответствующую модель управления запасами (например, из приведенных выше в разделах 1.1-1.9), находим объем поставок S_N и промежуток времени между ними $(\Delta t)_N$ на период времени $[t_1, T]$. В общем случае при увеличении спроса на ресурс в момент t_1 необходимо пересчитать момент обнуления запасов ресурса, оставшихся после последней до момента t_1 поставки, учитывая изменившуюся интенсивность его потребления. Пусть t_2- это такой момент обнуления запасов ресурса. Тогда для оставшегося промежутка планирования $[t_2, T]$ находим требуемый объем Q_N поставляемого ресурса. Далее вычисляем объем поставок S_N и промежуток времени между ними $(\Delta t)_N$ на период времени $[t_2, T]$, используя базовую модель Уилсона или ее модификации из разделов 1.2-1.9.

2. Модельный пример

Пусть потребности предприятия в деталях некоторого типа составляют $Q = 20000$ деталей за временной промежуток длительностью T=400 дней, причем детали расходуются равномерно в этом промежутке. Положим, что затраты на хранение одной детали в день составляют $C = 1$ денежную единицу (ден. ед.), а функция стоимости поставки партии деталей в зависимости от ее объема является ступенчатой:

$$D(S) = \begin{cases} 6400, \text{ если } S \in R_1, \\ 10000, \text{ если } S \in R_2, \\ 25600, \text{ если } S \in R_3, \end{cases}$$

где $R_1 = \{S : S \leq 500\}$, $R_2 = \{S : 500 < S < 2000\}$ и $R_3 = \{S : S \geq 2000\}$.

В соответствии с моделью управления запасами, приведенной в разделе 1.7, суммарные затраты на поставку и хранение деталей определяются выражением (30), которое примет вид

$$Z(S) = 2 \cdot 10^4 \cdot S^{-1} \cdot D(S) + 200 \cdot S,$$

а объем поставляемой партии деталей находится из условия (31). При этом внутренний минимум в (31) при $i = 1$ достигается на границе R_1 при S=500 деталей и равен $Z_1 = 3,56 \cdot 10^5$ден.ед. Соответственно, внутренний минимум при $i = 2$ достигается при $S = 1000$ деталей и равен $Z_2 = 4 \cdot 10^5$ ден.ед., а внутренний минимум при $i = 3$ достигается на границе R_3 при S=2000 деталей и равен $Z_3 = 6,56 \cdot 10^5$ ден.ед.

Тогда внешний минимум в (31) равен $Z_c = \min\{Z_1, Z_2, Z_3\} = 3,56 \cdot 10^5$ ден.ед. и достигается при $S = 500$. Таким образом, оптимальный объем поставляемой партии деталей составляет 500 деталей, а промежуток времени между поставками равен $\Delta t = Q \cdot S^{-1}$=40 дней.

Заключение

Представленные модели управления запасами производственных ресурсов на предприятии позволяют отказаться от основных допущений и ограничений классической модели Уилсона управления запасами при нахождении объемов партий поставляемых предприятию ресурсов и промежутков времени между поставками.

Вместе с тем при разработке комплексной модели управления запасами на конкретном производственном предприятии необходимо учитывать особенности производственного процесса на нем, а также сформулировать требования к этой модели. Тогда приведенные модели, а также заложенные в них идеи, после соответствующей адаптации к конкретному производственному процессу, позволят рассматривать вопросы планирования производства и управления запасами ресурсов в комплексе.

Список литературы

[1] Бабенко И.В. Современные тенденции формирования интегрированного управления запасами // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Экономика. Социология. Менеджмент. 2019. Т. 9, № 6. С. 135–146.

[2] Сток Д.Р., Ламберт Д.М. Стратегическое управление логистикой. М.: ИНФРА-М, 2005. 797 с.

[3] Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. М.: Радио и связь, 1984. 184 с.

[4] Сакович В.А. Модели управления запасами. Минск: Наука и техника, 1986. 319 с.

[5] Новосельцев В.И., Шугай О.Е., Попов Н.Н. Модель управления производственными запасами в условиях неопределенности спроса на выпускаемую продукцию // Вестник Воронежского института высоких технологий. 2019. № 1. С. 51–52.

[6] Мишенков А.А., Соломаха Г.М., Хижняк С.В. Управление запасами на предприятии на основе разделяющих кривых // Проблемы управления социально-экономическими системами. Теория и практика. Материалы VII Международной научно-практической конференции. Тверь, 2019. С. 83–88.

[7] Соломаха Г.М., Тулуева В.А. Модель управления запасами на предприятии при изменяющихся стоимости поставки и затратах на хранение // Проблемы управления социально-экономическими системами. Теория и практика. Материалы VIII Международной научно-практической конференции. Тверь, 2020. С. 94–99.

[8] Соломаха Г.М., Тулуева В.А., Хижняк С.В. Программный комплекс планирования производства и управления запасами // Программные продукты и системы. 2023. Т. 36, № 3. С. 459–465.

Образец цитирования

Соломаха Г.М., Тулуева В.А., Хижняк С.В. Детерминированные модели управления запасами на производственном предприятии при изменяющихся характеристиках спроса, поставки и хранения // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 1. С. 51–66. https://doi.org/10.26456/vtpmk729

Сведения об авторах

1. **Соломаха Геннадий Михайлович**
профессор кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: gsolomakha@ya.ru

2. **Тулуева Виктория Алексеевна**
старший аналитик SAP акционерного общества «Диэлектрические кабельные системы».

Россия, 170025, Тверская обл., пос. Большие Перемерки, ул. Бочкина, 15, АО «ДКС». E-mail: viktoriya.tulueva@dkc.ru

3. **Хижняк Станислав Виталиевич**
главный разработчик отдела разработки мобильной платформы ООО “ИТМ”.

*Россия, 350072, г. Краснодар, ул. Солнечная, 15, корп.5, ООО «ИТМ».
E-mail: stanislav.khizhnyak@gmail.com*

DETERMINISTIC MODELS OF INVENTORY MANAGEMENT IN A MANUFACTURING ENTERPRISE WITH CHANGING CHARACTERISTICS OF DEMAND, SUPPLY AND STORAGE

Solomakha G.M.[*], **Tulueva V.A.**[**], **Khizhnyak S.V.**[***]
[*]Tver State University, Tver
[**]JSC "Dielectric Cable Systems Tver
[***]ITM LLC, Krasnodar

Received 24.01.2025, revised 20.03.2025.

Manufacturing enterprise with changing characteristics of demand, supply and storage, which are a development of the Wilson model of inventory management, are presented. Analytical expressions are obtained for finding the volume of supplies and the intervals between supplies under these conditions.

Keywords: production stocks, inventory management, insurance stock, supply costs, inventory storage costs.

Citation

Solomakha G.M., Tulueva V.A., Khizhnyak S.V., "Deterministic models of inventory management in a manufacturing enterprise with changing characteristics of demand, supply and storage", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2025, № 1, 51–66 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk729

References

[1] Babenko I.V., "Current trends in the formation of integrated inventory management", *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Ekonomika. Sotsiologiya. Menedzhment [Proceedings of the Southwestern State University. Series: Economics. Sociology. Management]*, **9**:6 (2019), 135–146 (in Russian).

[2] Stok D.R., Lambert D.M., *Strategicheskoe upravlenie logistikoj [Strategic logistics management]*, INFRA-M Publ., Moscow, 2005 (in Russian), 797 pp.

[3] Kudryavtsev E.M., *Issledovanie operatsij v zadachakh, algoritmakh i programmakh [Research of operations in problems, algorithms and programs]*, Radio i Svyaz Publ., Moscow, 1984 (in Russian), 184 pp.

[4] Sakovich V.A., *Modeli upravleniya zapasami [Inventory management models]*, Nauka i Tekhnika, Minsk, 1986 (in Russian), 319 pp.

[5] Novosel‘tsev V.I., Shugaj O.E., Popov N.N., “A model for managing production stocks in conditions of uncertain demand for manufactured products”, *Vestnik Voronezhskogo instituta vy‘sokikh tekhnologij [Bulletin of the Voronezh Institute of High Technologies]*, 2019, № 1, 51–52 (in Russian).

[6] Mishenkov A.A., Solomakha G.M., Khizhnyak S.V., “Inventory management in an enterprise based on dividing curves”, *Problemy‘ upravleniya sotsial‘no-ekonomicheskimi sistemami. Teoriya i praktika. Materialy‘ VII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferentsii [Problems of managing socio-economic systems. Theory and practice. Proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference]*, Tver‘, 2019, 83–88 (in Russian).

[7] Solomakha G.M., Tulueva V.A., “An enterprise inventory management model with changing supply costs and storage costs”, *Problemy‘ upravleniya sotsial‘no-ekonomicheskimi sistemami. Teoriya i praktika. Materialy‘ VIII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferentsii [Problems of managing socio-economic systems. Theory and practice. Proceedings of the VIII International Scientific and Practical Conference]*, Tver‘, 2020, 94–99 (in Russian).

[8] Solomakha G.M., Tulueva V.A., Khizhnyak S.V., “Production planning and inventory management software package”, *Programmny‘e produkty‘ i sistemy‘ [Software products and systems]*, **36**:3 (2023), 459–465 (in Russian).

Author Info

1. **Solomakha Gennadiy Mikhaylovich**
   Professor at Mathematical Statistics and System Analysis department,
   Tver State University.

   Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU. E-mail: gsolomakha@ya.ru

2. **Tulueva Victoria Alekseevna**
   Senior Analyst at SAP, JSC "Dielectric Cable Systems".

   Russia, 170025, Tver region, village Bolshye Peremerki, 15, Bochkina str., JSC "DKS". E-mail: viktoriya.tulueva@dkc.ru

3. **Khizhnyak Stanislav Vitalievich**
   Main developer of the mobile platform development department, ITM LLC.

   Russia, 350072, Krasnodar, 15 Solnechnaya str., building 5, ITM LLC.
   E-mail: stanislav.khizhnyak@gmail.com