

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 519.2

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СРЕДНЕГО СУММАРНОГО РЕЗЕРВА СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА КЛИЕНТОВ¹

Бенинг В.Е.

МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Институт проблем информатики Российской академии наук, г. Москва

Поступила в редакцию 27.03.2025, после переработки 20.04.2025.

В работе рассмотрено асимптотическое поведение средних суммарных потерь организации, подверженной риску в случае, когда число факторов, приводящих к убытку, случайно. Проведено асимптотическое сравнение деятельности таких организаций в терминах необходимого добавочного числа таких факторов. Рассмотрены два примера, иллюстрирующие полученные результаты. Первый пример касается усеченного биномиального распределения, а во втором примере рассматривается усеченное распределение Пуассона. Эти распределения описывают число случайных факторов, приводящих к потерям.

Ключевые слова: резерв страховой компании, выборка случайного объема, асимптотические разложения, усеченные биномиальное распределение и распределение Пуассона.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 2. С. 5–21.
<https://doi.org/10.26456/vtpmk733>

Введение

Всюду ниже под организацией, подверженной риску, будем понимать страховую компанию (фирму), а под факторами риска — ее клиентов, страхующих свои потери. Хотя, например, под такой организацией можно рассматривать лечебное учреждение, а под факторами риска — ее больных (в случайном числе, например, в условиях пандемии). Итак, рассмотрим простейшую модель страхования, в которой в течение разных отчетных периодов одинаковой длины (например, месяцев или лет) происходит разное число страховых событий (страховых выплат

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075–15–2022–284.

© Бенинг В.Е., 2025

или заключений страховых контрактов). Подобного рода ситуации возникают, например, в медицине, когда число пациентов с тем или иным заболеванием варьируется от года к году, в технике, когда при испытании на надежность (скажем, при определении наработки на отказ) разных партий приборов, число отказавших приборов в разных партиях будет разным и заранее неопределенным. В таких ситуациях, когда число клиентов, которые доступны страховой компании заранее не известно, его разумно считать случайной величиной. В силу указанных обстоятельств вполне естественным становится изучение асимптотического поведения деятельности страховой компании в случае, когда число клиентов случайно. На естественность такого подхода, в частности, обратили внимание авторы работ [1–11].

В работе продолжаются исследования, начатые в работах [8–11], получены асимптотические разложения (а.р.) средних суммарных потерь страховой компании. Проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых компаний в терминах необходимого «добавочного числа клиентов» (асимптотический дефект). Приведены два примера, иллюстрирующие полученные результаты, в которых рассматриваются усеченное биномиальное распределение и распределение Пуассона, описывающие случайное число клиентов.

1. Асимптотический дефект и его свойства

Рассмотрим две статистические процедуры Π_n^* и Π_n с мерами качества π_n^* и π_n , соответственно. Здесь n — число наблюдений $X_1, \dots, X_n$, на которых основаны эти процедуры. При этом предполагается, что статистическая процедура Π_n^* является в некотором смысле «оптимальной», а процедура Π_n — конкурирующей. Например, в задаче статистического оценивания в качестве меры качества обычно выступает среднеквадратичное отклонение оценки от оцениваемой функции, при этом $\pi_n^* \leq \pi_n$, а в задаче проверки статистических гипотез в качестве меры качества критериев рассматривают их мощность и тогда $\pi_n^* \geq \pi_n$.

Обозначим через $m(n)$ необходимое число наблюдений, которое требуется процедуре $\Pi_{m(n)}$, основанной на наблюдениях $X_1, \dots, X_{m(n)}$, для достижения такого же качества, что и «лучшей» процедуре Π_n^* , которой требуется n наблюдений $X_1, \dots, X_n$. Ниже рассматривается асимптотический подход, означающий, что $n \rightarrow \infty$. Под асимптотической относительной эффективностью (АОЭ) процедуры $\Pi_{m(n)}$ по отношению к процедуре Π_n^* понимается предел (в случае его существования и независимости от последовательности $m(n)$) вида (см., например, [12])

$$e \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{m(n)}.$$

Например, предположим, что $e = 1/3$, тогда при больших значениях числа наблюдений n величина $m(n)$ приближенно равна $3n$, поэтому процедуре $\Pi_{m(n)}$ для достижения такого же качества, что и процедуре Π_n^* , требуется примерно в три раза больше наблюдений.

Вместо отношения необходимого числа наблюдений, естественно, можно было бы рассматривать разность вида $m(n) - n$, которая тоже имеет наглядный смысл необходимого дополнительного числа наблюдений, требующихся процедуре $\Pi_{m(n)}$

для достижения того же качества, что и процедуре Π_n^* . Однако, исторически сложилось так, что многие авторы сначала исследовали асимптотические свойства отношения $n/m(n)$ (возможно, в силу относительной простоты его поведения).

Впервые общее асимптотическое исследование поведения разности $m(n) - n$ было предпринято в 1970 г. Дж. Ходжесом и Э. Леманом (см. [13]). Они назвали разность $m(n) - n$ дефектом (deficiency) конкурирующей процедуры $\Pi_{m(n)}$ относительно процедуры Π_n^* и предложили обозначение

$$d_n = m(n) - n. \quad (1)$$

Если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ существует, то он называется *асимптотическим дефектом* процедуры $\Pi_{m(n)}$ относительно процедуры Π_n^* и обозначается символом d . Часто d называют просто дефектом $\Pi_{m(n)}$ относительно Π_n^* . Заметим, что если АОЭ $e \neq 1$, то $d = \infty$ и этот случай малоинтересен. В работе [13] также было отмечено, что существуют статистические задачи, в которых типичным образом возникает случай $e = 1$ (см., например, [12,14]), то есть в этом случае понятие АОЭ не дает ответа на вопрос, какая процедура «лучше», и понятие дефекта проясняет эту ситуацию, поскольку в этом случае асимптотический дефект может, в принципе, быть любым.

Предположим, например, что $d = 7$. Тогда для больших значений n величина $m(n)$ равна приблизительно $n + 7$. Чтобы получить ту же величину критерия качества процедуре $\Pi_{m(n)}$ требуется примерно на семь наблюдений больше, чем процедуре Π_n^* .

Таким образом дефект процедуры $\Pi_{m(n)}$ относительно процедуры Π_n^* показывает, сколько добавочных наблюдений примерно требуется, если мы настаиваем на использовании процедуры $\Pi_{m(n)}$ вместо процедуры Π_n^* , и поэтому создает естественный базис для их асимптотического сравнения в случае $e = 1$. Исследование асимптотического поведения дефекта d_n технически более сложно, чем нахождение предела e . Часто оно требует построения асимптотических разложений (а.р.) для соответствующих функций, характеризующих качество оценок (см., например, [12,14]).

Напомним, что статистические процедуры Π_n^* и Π_n имеют меры качества π_n^* и π_n соответственно, тогда по определению величины $d_n = m(n) - n$, для каждого n должно выполняться равенство

$$\pi_n^* = \pi_{m(n)}. \quad (2)$$

При решении уравнения (2) целочисленную величину $m(n)$ следует рассматривать как переменную, принимающую произвольные действительные значения. Для этого можно определить функцию $\pi_{m(n)}$ для нецелых значений $m(n)$ по формуле

$$\pi_{m(n)} = (1 - m(n) + [m(n)]) \pi_{[m(n)]} + (m(n) - [m(n)]) \pi_{[m(n)]+1}$$

(см. работу [13]).

Типичным образом функции π_n^* и π_n неизвестны точно и используются их аппроксимации. Предположим, что справедливы асимптотические разложения вида

$$\pi_n^* = \frac{a}{n^l} + \frac{b}{n^{l+s}} + o(n^{-l-s}), \quad (3)$$

$$\pi_n = \frac{a}{n^l} + \frac{c}{n^{l+s}} + o(n^{-l-s}), \quad (4)$$

где a , b и c — некоторые постоянные, не зависящие от n , а $l > 0$, $s > 0$ — некоторые константы, определяющие порядок убывания по n этих критериев качества. Первый член в этих асимптотических разложениях одинаков, и это отражает тот факт, что АОЭ этих процедур равна единице. Из соотношений (1) — (4) легко получить, что (см. работу [13] или книгу [12])

$$d_n = \frac{c - b}{l a} n^{1-s} + o(n^{1-s}). \quad (5)$$

Таким образом асимптотический дефект имеет вид

$$d = \begin{cases} \pm\infty, & 0 < s < 1, \\ \frac{c - b}{l a}, & s = 1, \\ 0, & s > 1. \end{cases} \quad (6)$$

Случай, когда выполняется равенство $s = 1$, представляется наиболее интересным, поскольку в этом случае асимптотический дефект конечен. Дж. Ходжес и Э. Леман в работе [13] привели ряд простых примеров, показывающих естественность возникновения этого случая в математической статистике (см., также книгу [14]).

В статье приняты следующие обозначения: $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

В п. 2 приведены результаты в случае неслучайного числа клиентов, в п. 3 проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых компаний в этом случае, в п. 4 рассмотрена ситуация, когда число клиентов страховой фирмы случайно, в п. 5 рассмотрены примеры, касающиеся биномиального и пуассоновского распределений.

2. Асимптотическое поведение средних суммарных потерь страховой организации в случае большого неслучайного числа клиентов

Рассмотрим страховую компанию, занимающуюся страхованием $n \in \mathbb{N}$ однотипных независимых клиентов, риски которых описываются случайными величинами $X_1, \dots, X_n$, которые предполагаются независимыми и одинаково распределенными. Обозначим через

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad (7)$$

суммарные случайные потери страховой компании. Предположим, что средние потери страховой компании описываются математическим ожиданием вида

$$\mathbb{E} g\left(\frac{S_n}{n}\right), \quad (8)$$

где $g(x)$ — достаточно гладкая фиксированная функция, которая определяется страховой компанией при окончательном формировании средних потерь.

Применяя формулу Тейлора, и неравенство вида (см. [16])

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right|^r \leq C n^r \mathbb{E} |Y_1|^r, \quad r \geq 1, \quad C > 0,$$

где $Y_1, \dots, Y_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbb{E} Y_1 = 0$, несложно получить следующий результат.

Лемма 1. Пусть функция $g(x)$ имеет четыре производные $g^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, причем четвертая производная $g^{(4)}(x)$ удовлетворяет условию Гельдера вида

$$\left| g^{(4)}(x_1) - g^{(4)}(x_2) \right| \leq C |x_1 - x_2|^\alpha, \quad C > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Пусть также существует момент вида

$$\mathbb{E} |X_1|^{4+\alpha} < \infty.$$

Тогда для средних потерь (8) справедливо асимптотическое разложение

$$\mathbb{E}(g(n^{-1}S_n)) = g(\mu) + \frac{1}{2n} g^{(2)}(\mu)\sigma^2 + \frac{1}{6n^2} \left(g^{(3)}(\mu) \mu_3 + \frac{3\sigma^4}{4} g^{(4)}(\mu) \right) + r_n,$$

где для остаточного члена r_n справедливо неравенство

$$|r_n| \leq \frac{C \mathbb{E} |X_1 - \mu|^{4+\alpha}}{n^{(4+\alpha)/2}}$$

и

$$\mu = \mathbb{E} X_1, \quad \sigma^2 = \mathbb{D} X_1 = \mathbb{E} X_1^2 > 0, \quad \mu_3 = \mathbb{E} (X_1 - \mu)^3.$$

Утверждение этой Леммы может быть использовано при асимптотическом анализе средних суммарных потерь страховой компании, использующую конкретную функцию $g(x)$.

Рассмотрим применение этой Леммы к асимптотическому анализу числа «необходимых клиентов» в случае, когда страховая компания страхует однотипных и независимых клиентов, а средние суммарные потери представлены величинами (7) и (8).

Итак, пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, удовлетворяющие условиям Леммы 1. В качестве меры качества, описывающую деятельность страховой компании, рассмотрим величину (8), то есть пусть

$$\pi_n^* = \mathbb{E} g\left(\frac{S_n}{n}\right). \quad (9)$$

Предположим, что в страховую компанию также обратилось n однотипных независимых клиентов, случайные потери которых описываются независимыми одинаково распределенными случайными величинами $Z_1, \dots, Z_n$ с такими же стандартными характеристиками

$$\mathbb{E} Z_1 = \mathbb{E} X_1 = \mu, \quad \mathbb{D} Z_1 = \mathbb{D} X_1 = \sigma^2 > 0,$$

но в остальном распределения случайных величин Z_i могут отличаться от соответствующих распределений случайных величин X_i , в частности, у них может отличаться от μ_3 третий центральный момент вида

$$\bar{\mu}_3 = \mathbf{E} (Z_1 - \mu)^3.$$

При этом в качестве меры качества деятельности страховой компании рассматривается величина вида

$$\pi_n = \mathbf{E} g\left(\frac{\bar{S}_n}{n}\right), \quad (10)$$

где

$$\bar{S}_n = \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Определим формально последовательности натуральных чисел $m(n)$ из уравнения (см. (1) и (2))

$$\begin{aligned} \pi_n^* &= \pi_{m(n)}, \\ d_n &= m(n) - n, \end{aligned}$$

тогда смысл величины d_n состоит в том, что это добавочное число клиентов второго типа (с потерями Z_i), при котором средние потери будут такими же, как и для клиентов первого типа (с потерями X_i). В приводимой ниже Теореме находится предел этой величины

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n.$$

Теорема 1. Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины $(X_1, \dots, X_n)$; $(Z_1, \dots, Z_n)$ и функция $g(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 1 и $g^{(2)}(\mu) \neq 0$. Тогда для асимптотического дефекта d справедливо равенство

$$d = \frac{g^{(3)}(\mu)(\bar{\mu}_3 - \mu_3)}{3\sigma^2 g^{(2)}(\mu)}.$$

Доказательство. Непосредственно следует из утверждения Леммы 1 и формулы (6). $\square$

Аналогичное утверждение может быть доказано, в случае, если страховая компания использует для оценки качества своей деятельности другую функцию $\tilde{g}(x)$. То есть пусть

$$\tilde{\pi}_n = \mathbf{E} \tilde{g}\left(\frac{S_n}{n}\right) \quad (11)$$

и

$$\begin{aligned} \pi_n^* &= \tilde{\pi}_{\tilde{m}(n)}, \\ \tilde{d}_n &= \tilde{m}(n) - n, \quad \tilde{d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}_n. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть независимые одинаково распределенные с.в. $X_1, \dots, X_n$ и функции $g(x)$ и $\tilde{g}(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 1. Причем для функции $\tilde{g}(x)$ справедливы условия

$$\tilde{g}(\mu) = g(\mu), \quad \tilde{g}^{(2)}(\mu) = g^{(2)}(\mu) \neq 0.$$

Тогда для асимптотического дефекта $\tilde{d}$ справедливо равенство

$$\tilde{d} = \frac{4\mu_3(\tilde{g}^{(3)}(\mu) - g^{(3)}(\mu)) + 3\sigma^4(\tilde{g}^{(4)}(\mu) - g^{(4)}(\mu))}{12\sigma^2 g^{(2)}(\mu)}.$$

Функция $\tilde{g}(x)$ удовлетворяет условиям Теоремы 2, если она, например, имеет вид

$$\tilde{g}(x) = g(x) + \sum_{j=1}^k \beta_j (x - \mu)^j, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \beta_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где $\beta_1, \dots, \beta_k$ — произвольные действительные коэффициенты, причем $\beta_2 = 0$. В этом случае для асимптотического дефекта $\tilde{d}$ справедлива формула

$$\tilde{d} = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \\ \frac{2\mu_3\beta_3}{\sigma^2 g^{(2)}(\mu)}, & k = 3, \\ \frac{2\mu_3\beta_3 + 6\sigma^4\beta_4}{\sigma^2 g^{(2)}(\mu)}, & k \geq 4. \end{cases}$$

В более общем случае, когда

$$\tilde{g}(x) = g(x) + h(x),$$

где функция $h(x)$ удовлетворяет дополнительным условиям

$$h(\mu) = 0, \quad h^{(2)}(\mu) = 0,$$

формула для асимптотического дефекта из Теоремы 2 приобретает вид

$$\tilde{d} = \frac{4\mu_3 h^{(3)}(\mu) + 3\sigma^4 h^{(4)}(\mu)}{12\sigma^2 g^{(2)}(\mu)}.$$

3. Случайное число клиентов

Рассмотрим случайные величины $N_1, N_2, \dots$ и $X_1, X_2, \dots$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. В рассматриваемом случае страхования случайные величины (с.в.) $X_1, \dots, X_n$ интерпретируются как страховые требования клиентов, а n как неслучайное число клиентов, обратившихся в страховую фирму, при этом случайная величина N_n — случайное число клиентов страховой компании, зависящее от натурального параметра $n \in \mathbb{N}$. Например, если с.в. N_n имеет геометрическое распределение вида

$$P(N_n = k) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

то

$$E N_n = n, \tag{12}$$

и значит среднее число клиентов, обратившихся в страховую компанию, равно n . Условие (12) далее будет предполагаться всегда выполненным.

Предположим, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ с.в. N_n принимает только натуральные значения (то есть $N_n \in \mathbb{N}$) и не зависит от последовательности с.в. $X_1, X_2, \dots$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $S_n = S_n(X_1, \dots, X_n)$ обобщенные потери страховой компании, то есть действительную измеримую функцию, зависящую от страховых требований $X_1, \dots, X_n$. Для каждого n определим случайные потери страховой компании, обслуживающей случайное число клиентов N_n , как S_{N_n}

$$S_{N_n}(\omega) \equiv S_{N_n(\omega)}(X_1(\omega), \dots, X_{N_n(\omega)}(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

Всюду ниже рассматривается случай (7), то есть

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

и предполагается, что средние суммарные потери страховой компании в случае случайного числа клиентов описываются математическим ожиданием вида

$$\mathbb{E} g\left(\frac{S_{N_n}}{N_n}\right), \quad (13)$$

где $g(x)$, как и выше, достаточно гладкая фиксированная функция, которая определяется страховой компанией при окончательном формировании средних суммарных потерь.

С помощью Леммы 1 и формулы полной вероятности несложно получить следующее утверждение

Лемма 2. Пусть функция $g(x)$ имеет четыре производные $g^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, причем четвертая производная $g^{(4)}(x)$ удовлетворяет условию Гельдера вида

$$\left| g^{(4)}(x_1) - g^{(4)}(x_2) \right| \leq C |x_1 - x_2|^\alpha, \quad C > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Пусть также существует момент вида

$$\mathbb{E} |X_1|^{4+\alpha} < \infty.$$

Тогда для средних потерь (13) справедливо асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(N_n^{-1} S_{N_n})) &= g(\mu) + \frac{1}{2} \mathbb{E} N_n^{-1} \cdot g^{(2)}(\mu) \sigma^2 + \\ &\quad \frac{1}{6} \mathbb{E} N_n^{-2} \cdot \left(g^{(3)}(\mu) \mu_3 + \frac{3\sigma^4}{4} g^{(4)}(\mu) \right) + \bar{r}_n, \end{aligned}$$

где для остаточного члена $\bar{r}_n$ справедливо неравенство

$$|\bar{r}_n| \leq C \mathbb{E} N_n^{-(4+\alpha)/2} \cdot \mathbb{E} |X_1 - \mu|^{4+\alpha}$$

и

$$\mu = \mathbb{E} X_1, \quad \sigma^2 = \mathbb{D} X_1 = \mathbb{E} X_1^2 > 0, \quad \mu_3 = \mathbb{E} (X_1 - \mu)^3.$$

Рассмотрим теперь в качестве характеристик деятельности страховой компании ее средние суммарные потери в случаях неслучайного и случайного числа клиентов (см. формулы (8) и (13), то есть пусть

$$\pi_n^* = \mathbb{E} g\left(\frac{S_n}{n}\right), \quad \bar{\pi}_n = \mathbb{E} g\left(\frac{S_{N_n}}{N_n}\right). \quad (14)$$

Определим, как и выше, формально последовательность натуральных чисел $\bar{m}(n)$ из уравнения (см. (1) и (2))

$$\begin{aligned} \pi_n^* &= \pi_{\bar{m}(n)}, \\ \bar{d}_n &= \bar{m}(n) - n, \end{aligned}$$

величина $\bar{d}_n$ это «среднее добавочное число клиентов» в случае случайного числа клиентов, при котором средние потери будут такими же, как и для случая неслучайного числа клиентов. В приводимом ниже утверждении находится предел этой величины

$$\bar{d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_n.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия Леммы 2 и для моментов случайного индекса N_n справедливы асимптотические разложения вида

$$\begin{aligned} \mathbb{E} N_n^{-1} &= \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + o(n^{-2}), \\ \mathbb{E} N_n^{-2} &= \frac{b_2}{n^2} + o(n^{-2}), \quad a_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}, \\ \mathbb{E} N_n^{-(4+\alpha)/2} &= o(n^{-2}), \end{aligned}$$

тогда для средних потерь (13) справедливо асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(N_n^{-1} S_{N_n})) &= g(\mu) + \frac{a_1}{2n} \cdot g^{(2)}(\mu) \sigma^2 + \\ &+ \frac{1}{6n^2} \cdot \left(b_2 g^{(3)}(\mu) \mu_3 + \frac{3b_2 \sigma^4}{4} g^{(4)}(\mu) + 3a_2 g^{(2)}(\mu) \sigma^2 \right) + o(n^{-2}). \end{aligned}$$

В случае, если

$$a_1 = 1,$$

то асимптотический дефект $\bar{d}$ равен

$$\bar{d} = \frac{b_2 - 1}{12g^{(2)}(\mu)\sigma^2} \cdot \left(4g^{(3)}(\mu) \mu_3 + 3\sigma^4 g^{(4)}(\mu) \right) + a_2.$$

Доказательство. Непосредственно следует из Леммы 2 и формулы 6. $\square$

4. Случай усеченных биномиального распределения и распределения Пуассона

Пусть с.в. N имеет усеченное в нуле биномиальное распределение с параметрами n и $p \in (0, 1)$, т. е.

$$P(N = i) = \frac{1}{1 - q^n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}, \quad q = 1 - p, \quad i = 1, \dots, n. \quad (15)$$

Тогда

$$\mathbb{E} N = \frac{np}{1 - q^n}$$

и в работе [18, см. формулы (2.18) — (2.20)] получены следующие асимптотические формулы

$$\mathbb{E} N^{-1} = \frac{1}{1 - q^n} \left(\frac{1}{np} + \frac{q}{(np)^2} + O((np)^{-3}) \right),$$

$$\mathbb{E} N^{-2} = \frac{1}{1 - q^n} \left(\frac{1}{(np)^2} + O((np)^{-3}) \right),$$

$$\mathbb{E} N^{-3} = \frac{1}{1 - q^n} \left(\frac{1}{(np)^3} + O((np)^{-4}) \right).$$

Определим теперь случайный индекс N_n как с.в. N с параметрами nm , $n, m \in \mathbb{N}$, m фиксировано и $p = 1/m$, $n \rightarrow \infty$. Тогда из последних формул получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} N_n^{-1} &= \frac{1}{1 - (1 - 1/m)^{nm}} \left(\frac{1}{n} + \frac{1 - 1/m}{n^2} + O(n^{-3}) \right) = \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1 - 1/m}{n^2} + O(n^{-3}), \end{aligned}$$

аналогично

$$\mathbb{E} N_n^{-p} = \frac{1}{n^p} + O(n^{-p-1}), \quad p = 2, 3, \dots$$

Теорема 4. Пусть случайный индекс N_n имеет распределение (15) с параметрами nm , $n, m \in \mathbb{N}$, m фиксировано и $p = 1/m$, $n \rightarrow \infty$. Тогда при выполнении условий Леммы 2 справедливы асимптотические разложения

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(N_n^{-1} S_{N_n})) &= g(\mu) + \frac{1}{2n} \cdot g^{(2)}(\mu) \sigma^2 + \\ &+ \frac{1}{6n^2} \cdot \left(g^{(3)}(\mu) \mu_3 + \frac{3\sigma^4}{4} g^{(4)}(\mu) + 3 \left(1 - \frac{1}{m} \right) g^{(2)}(\mu) \sigma^2 \right) + o(n^{-2}) \end{aligned}$$

и асимптотический дефект $\bar{d}$ равен

$$\bar{d} = 1 - \frac{1}{m}.$$

Доказательство. Непосредственно следует из утверждения Теоремы 3, приведенных выше формул для моментов вида $\mathbb{E} N_n^{-p}$, $p = 1, 2, 3, \dots$ и неравенства

$$\mathbb{E} N_n^{-(4+\alpha)/2} \leq \left(\mathbb{E} N_n^{-3} \right)^{(4+\alpha)/6} = o(n^{-2}).$$

□

Теорема 5. Пусть независимые одинаково распределенные с.в. $X_1, \dots, X_n$ и функции $g(x)$ и $\tilde{g}(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 1 и пусть случайный индекс N_n имеет распределение (15) с параметрами nt , $n, t \in \mathbb{N}$, t фиксировано и $p = 1/t$, $n \rightarrow \infty$. Пусть также меры качества имеют вид

$$\pi_n^* = \mathbb{E} g\left(\frac{S_{N_n}}{N_n}\right), \quad \hat{\pi}_n = \mathbb{E} \tilde{g}\left(\frac{S_{N_n}}{N_n}\right).$$

Последовательность $\hat{m}(n)$ удовлетворяет условиям

$$\pi_n^* = \hat{\pi}_{\hat{m}(n)},$$

$$\hat{d}_n = \hat{m}(n) - n, \quad \hat{d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}_n,$$

причем для функции $\tilde{g}(x)$ справедливы условия

$$\tilde{g}(\mu) = g(\mu), \quad \tilde{g}^{(2)}(\mu) = g^{(2)}(\mu) \neq 0.$$

Тогда для асимптотического дефекта $\hat{d}$ справедливо равенство

$$\hat{d} = \frac{4\mu_3(\tilde{g}^{(3)}(\mu) - g^{(3)}(\mu)) + 3\sigma^4(\tilde{g}^{(4)}(\mu) - g^{(4)}(\mu))}{12\sigma^2 g^{(2)}(\mu)}.$$

Замечание 1. Заметим, что если выполнены условия Теоремы 5, при этом меры качества, соответственно, определены как

$$\mathbb{E} g\left(\frac{S_n}{n}\right), \quad \mathbb{E} \tilde{g}\left(\frac{S_{N_n}}{N_n}\right),$$

то формула для асимптотического дефекта приобретает вид

$$\frac{4\mu_3(\tilde{g}^{(3)}(\mu) - g^{(3)}(\mu)) + 3\sigma^4(\tilde{g}^{(4)}(\mu) - g^{(4)}(\mu))}{12\sigma^2 g^{(2)}(\mu)} + 1 - \frac{1}{t}.$$

Функция $\tilde{g}(x)$ удовлетворяет условиям Теоремы 5, если она, например, имеет вид

$$\tilde{g}(x) = g(x) + \sum_{j=1}^k \beta_j (x - \mu)^j, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \beta_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где $\beta_1, \dots, \beta_k$ — произвольные действительные коэффициенты, причем $\beta_2 = 0$. В этом случае для асимптотического дефекта $\hat{d}$ справедлива формула

$$\hat{d} = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \\ \frac{2\mu_3\beta_3}{\sigma^2 g^{(2)}(\mu)}, & k = 3, \\ \frac{2\mu_3\beta_3 + 6\sigma^4\beta_4}{\sigma^2 g^{(2)}(\mu)}, & k \geq 4. \end{cases}$$

В более общем случае, когда

$$\tilde{g}(x) = g(x) + h(x),$$

где функция $h(x)$ удовлетворяет дополнительным условиям

$$h(\mu) = 0, \quad h^{(2)}(\mu) = 0,$$

последняя формула для асимптотического дефекта из Теоремы 5 приобретает вид

$$\hat{d} = \frac{4\mu_3 h^{(3)}(\mu) + 3\sigma^4 h^{(4)}(\mu)}{12\sigma^2 g^{(2)}(\mu)}.$$

Заметим, что при выполнении условий Замечания 1 во всех этих случаях асимптотический дефект имеет вид $\hat{d} + 1 = 1/m$.

Пусть теперь случайная величина M имеет усеченное в нуле распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, то есть

$$P(M = i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i! (1 - e^{-\lambda})}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

тогда

$$E M = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}$$

и в работе [18, см. (3.7)] также получены следующие асимптотические формулы:

$$E M^{-g} = \frac{1}{\lambda^g (1 - e^{-\lambda})} \left(1 + \frac{g(g+1)}{2\lambda} + \frac{g(10 + 21g + 14g^2 + 3g^3)}{24\lambda^2} + O(\lambda^{-3}) \right), \quad g > 0.$$

Определим теперь случайный индекс N_n как случайную величину $M = M_n$ с параметром $\lambda = n \in \mathbb{N}$, $n \rightarrow \infty$. Тогда из последней формулы следует, что

$$E N_n^{-g} = \frac{1}{n^g} \left(1 + \frac{g(g+1)}{2n} + \frac{g(10 + 21g + 14g^2 + 3g^3)}{24n^2} + O(n^{-3}) \right), \quad g > 0.$$

Теорема 6. Пусть случайный индекс N_n имеет распределение (16) с параметром $\lambda = n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \rightarrow \infty$. Тогда при выполнении условий Леммы 2 справедливы асимптотические разложения

$$E(g(N_n^{-1} S_{N_n})) = g(\mu) + \frac{1}{2n} \cdot g^{(2)}(\mu) \sigma^2 + \frac{1}{6n^2} \cdot \left(g^{(3)}(\mu) \mu_3 + \frac{3\sigma^4}{4} g^{(4)}(\mu) + 3g^{(2)}(\mu) \sigma^2 \right) + o(n^{-2})$$

и асимптотический дефект $\bar{d}$ равен

$$\bar{d} = 1.$$

Доказательство. Непосредственно следует из утверждения Теоремы 3, приведенных выше формул для моментов вида $E N_n^{-g}$, $g > 0$ и соотношения

$$E N_n^{-(4+\alpha)/2} = O(n^{-2-\alpha/2}).$$

□

Теорема 7. Пусть независимые одинаково распределенные с.в. $X_1, \dots, X_n$ и функции $g(x)$ и $\tilde{g}(x)$ удовлетворяют условиям Леммы 1 и пусть случайный индекс N_n имеет распределение Пуассона (16) с параметром $\lambda = n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \rightarrow \infty$. Пусть также меры качества имеют вид

$$\pi_n^* = \mathbb{E} g\left(\frac{S_{N_n}}{N_n}\right), \quad \check{\pi}_n = \mathbb{E} \tilde{g}\left(\frac{S_{N_n}}{N_n}\right).$$

Последовательность $\check{m}(n)$ удовлетворяет условиям

$$\pi_n^* = \check{\pi}_{\check{m}(n)},$$

$$\check{d}_n = \check{m}(n) - n, \quad \check{d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{d}_n,$$

причем для функции $\tilde{g}(x)$ справедливы условия

$$\tilde{g}(\mu) = g(\mu), \quad \tilde{g}^{(2)}(\mu) = g^{(2)}(\mu) \neq 0.$$

Тогда для асимптотического дефекта $\check{d}$ справедливо равенство

$$\check{d} = \frac{4\mu_3(\tilde{g}^{(3)}(\mu) - g^{(3)}(\mu)) + 3\sigma^4(\tilde{g}^{(4)}(\mu) - g^{(4)}(\mu))}{12\sigma^2 g^{(2)}(\mu)}.$$

Замечание 2. Заметим, что если выполнены условия Теоремы 7, и меры качества имеют вид

$$\mathbb{E} g\left(\frac{S_n}{n}\right), \quad \mathbb{E} \tilde{g}\left(\frac{S_{N_n}}{N_n}\right),$$

то асимптотический дефект равен

$$\frac{4\mu_3(\tilde{g}^{(3)}(\mu) - g^{(3)}(\mu)) + 3\sigma^4(\tilde{g}^{(4)}(\mu) - g^{(4)}(\mu))}{12\sigma^2 g^{(2)}(\mu)} + 1.$$

Функция $\tilde{g}(x)$ удовлетворяет условиям Теоремы 7, если она, например, имеет вид

$$\tilde{g}(x) = g(x) + \sum_{j=1}^k \beta_j (x - \mu)^j, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \beta_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где $\beta_1, \dots, \beta_k$ — произвольные действительные коэффициенты, причем $\beta_2 = 0$. В этом случае для асимптотического дефекта $\check{d}$ справедлива формула

$$\check{d} = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \\ \frac{2\mu_3\beta_3}{\sigma^2 g^{(2)}(\mu)}, & k = 3, \\ \frac{2\mu_3\beta_3 + 6\sigma^4\beta_4}{\sigma^2 g^{(2)}(\mu)}, & k \geq 4. \end{cases}$$

В более общем случае, когда

$$\tilde{g}(x) = g(x) + h(x),$$

где функция $h(x)$ удовлетворяет дополнительным условиям

$$h(\mu) = 0, \quad h^{(2)}(\mu) = 0,$$

тогда формула для асимптотического дефекта из Теоремы 7 приобретает вид

$$\check{d} = \frac{4\mu_3 h^{(3)}(\mu) + 3\sigma^4 h^{(4)}(\mu)}{12\sigma^2 g^{(2)}(\mu)}.$$

Во всех этих случаях, при выполнении условий Замечания 2, асимптотический дефект равен $\check{d} + 1$.

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрено асимптотическое поведение средних суммарных потерь страховой компании (организации, подверженной риску) в простейшей модели страхования в случае, когда число факторов, приводящих к убытку (число клиентов), как случайно так и детерминировано. Проведено асимптотическое сравнение деятельности подобных организаций в терминах необходимого добавочного числа таких факторов (клиентов). Приведены явные формулы для асимптотического дефекта. Рассмотрены два конкретных примера, иллюстрирующие полученные результаты. Первый пример касается усеченного пуассоновского распределения, которое описывает случайное число клиентов, а во втором примере рассматривается усеченное биномиальное распределение.

Список литературы

- [1] Гнеденко Б.В. Об оценке неизвестных параметров распределения при случайном числе независимых наблюдений // Труды Тбилисского Математического института. 1989. Т. 92. С. 146–150.
- [2] Гнеденко Б.В., Фахим Х. Об одной теореме переноса // Доклады Академии наук СССР. 1969. Т. 187. С. 15–17.
- [3] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Об использовании распределения Стьюдента в задачах теории вероятностей и математической статистики // Теория вероятностей и ее применения. 2004. Т. 49, № 3. С. 417–435. <https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159>
- [4] Bening V.E., Korolev V.Yu. Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance. Utrecht: VSP, 2002. 434 p.
- [5] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Некоторые статистические задачи, связанные с распределением Лапласа // Информатика и ее применения. 2008. Т. 2, № 2. С. 19–34.
- [6] Bening V.E. Transfer theorems concerning asymptotic expansions for the distribution functions of statistics based on samples with random sizes // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. 2018. Vol. 28, № 2. Pp. 187–200.

- [7] Bening V.E. On the asymptotic deficiency of some statistical estimators based on samples with random sizes // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. 2018. Vol. 21, № 2. Pp. 185–193.
- [8] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении квантилей распределений статистик, основанных на выборках случайного объема // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 5–12. <https://doi.org/10.26456/vtpmk175>
- [9] Бенинг В.Е. О поведении асимптотического дефекта квантилей распределений статистик, основанных на выборках случайного объема // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 42–57. <https://doi.org/10.26456/vtpmk509>
- [10] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении резерва страховой компании // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 35–48. <https://doi.org/10.26456/vtpmk594>
- [11] Бенинг В.Е. О сравнении необходимых резервов организаций, подверженных риску, с помощью понятия дефект // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 5–26. <https://doi.org/10.26456/vtpmk643>
- [12] Lehmann E.L., Casella G. Theory of Point Estimation. Berlin: Springer, 1998. 589 p.
- [13] Hodges J.L., Lehmann E.L. Deficiency // The Annals of Mathematical Statistics. 1970. Vol. 41, № 5. Pp. 783–801.
- [14] Bening V.E. Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses: Efficient Statistics, Optimality, Power Loss, and Deficiency. Utrecht: VSP, 2000. 277 p.
- [15] Znidaric M. Asymptotic expansion for inverse moments of binomial and Poisson distributions. arXiv:math/0511226v1[math.ST]. 2005.
- [16] Chung K.L. The strong law of large numbers // Proceedings of the Second Berkley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. 1951. Pp. 341–352.

Образец цитирования

Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении среднего суммарного резерва страховой компании для случайного числа клиентов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 2. С. 5–21. <https://doi.org/10.26456/vtpmk733>

Сведения об авторах

1. Бенинг Владимир Евгеньевич

профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова; старший научный сотрудник ИПИ РАН.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.

E-mail: bening@yandex.ru

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF INSURANCE COMPANY RESERVE IN THE CASE OF RANDOM NUMBER OF CLIENTS

Bening V.E.

Lomonosov Moscow State University, Moscow
Institute of Informatics Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow

Received 27.03.2025, revised 20.04.2025.

The paper considers the asymptotic behavior of the average total losses of an organization at risk in the case when the number of factors leading to the loss is random. An asymptotic comparison of the activities of such organizations is carried out in terms of the necessary additional number of such factors. Two examples illustrating the results are considered. The first example concerns a truncated binomial distribution, while the second example considers a truncated Poisson distribution. These distributions describe the number of random factors that lead to losses.

Keywords: insurance company reserve, sample with random size, asymptotic expansion, truncated Poisson and binomial distributions.

Citation

Bening V.E., “On the asymptotic behavior of insurance company reserve in the case of random number of clients”, *Vestnik TvgU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2025, № 2, 5–21 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk733>

References

- [1] Gnedenko B.V., “On the estimation of unknown distribution parameters for a random number of independent observations”, *Trudy Tbilisskogo Matematicheskogo instituta [Proceedings of the Tbilisi Mathematical Institute]*, **92** (1989), 146–150 (in Russian).
- [2] Gnedenko B.V., Fakhim Kh., “On a transfer theorem”, *Doklady Mathematics*, **187** (1969), 15–17 (in Russian).
- [3] Bening V.E., Korolev V.Y., “On an application of the Student distribution in the theory of probability and mathematical statistics”, *Theory of Probability and its Applications*, **49:3** (2005), 377–391, <https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159>.
- [4] Bening V.E., Korolev V.Yu., *Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance*, VSP, Utrecht, 2002, 434 pp.
- [5] Bening V.E., Korolev V.Yu., “Some statistical problems related to the Laplace distribution”, *Informatics and Applications*, **2:2** (2008), 19–34 (in Russian).

- [6] Bening V.E., “Transfer theorems concerning asymptotic expansions for the distribution functions of statistics based on samples with random sizes”, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **28**:2 (2018), 187–200.
- [7] Bening V.E., “On the asymptotic deficiency of some statistical estimators based on samples with random sizes”, *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, **21**:2 (2018), 185–193.
- [8] Bening V.E., “On asymptotic behavior of quantiles of the distributions of statistics based on the samples with random sizes”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 5–12 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtpmk175>.
- [9] Bening V.E., “On asymptotic behavior of quantiles deficiencies of the distributions of statistics based on the samples with random sizes”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2018, № 3, 42–57 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtpmk509>.
- [10] Bening V.E., “On the asymptotic behavior of insurance company reserve”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 35–48 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtpmk594>.
- [11] Bening V.E., “On the organizations’ risk reserves comparison based on the deficiency concept”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 3, 5–26 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtpmk643>.
- [12] Lehmann E.L., Casella G., *Theory of Point Estimation*, Springer, Berlin, 1998, 589 pp.
- [13] Hodges J.L., Lehmann E.L., “Deficiency”, *The Annals of Mathematical Statistics*, **41**:5 (1970), 783–801.
- [14] Bening V.E., *Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses: Efficient Statistics, Optimality, Power Loss, and Deficiency*, VSP, Utrecht, 2000, 277 pp.
- [15] Znidaric M., *Asymptotic expansion for inverse moments of binomial and Poisson distributions*, arXiv:math/0511226v1[math.ST], 2005.
- [16] Chung K.L., “The strong law of large numbers”, *Proceedings of the Second Berkley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1951, 341–352.

Author Info

1. Bening Vladimir Evgenyevich

Professor at Mathematical Statistics Department, Lomonosov Moscow State University; Senior Researcher at Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences.

Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.

E-mail: bening@yandex.ru