

АБСОЛЮТНЫЙ ЦЕНТР ГРАФА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО МЕСТОРАСПОЛОЖЕНИЯ МОБИЛЬНОГО ЦЕНТРА ОБСЛУЖИВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Игнатьев С.В., Плакса Ю.А., Курочкина С.А., Прусова Н.А.
ЯВВУ ПВО им. Маршала Советского Союза Л.А. Говорова, г. Ярославль

Поступила в редакцию 06.05.2025, после переработки 24.06.2025.

Рассмотрена задача о поиске оптимального местонахождения мобильного центра обслуживания технических систем. Решение данной задачи основано на применении минимаксного алгоритма теории графов. Показано, что поиск оптимального местонахождения мобильного центра обслуживания происходит в несколько этапов. Первый этап заключается в формализованном описании группировки технических систем и получении пространственно-временной модели группировки, представляющей собой совокупность мультиграфа и подматриц достижимостей. На втором этапе выполняется адаптация полученного мультиграфа к использованию метода Хакими, вычисление матриц расстояний. На третьем этапе осуществляется поиск локальных абсолютных центров графа и вычисление абсолютного центра графа. На четвертом этапе определяется местоположения абсолютного центра группировки технических систем на местности путем аппроксимации маршрута временной кусочно-непрерывной функцией.

Ключевые слова: мультиграф, матрица достижимости, минимаксный алгоритм, абсолютный центр графа, метод Хакими, центр обслуживания технических систем.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 2. С. 32–49.
<https://doi.org/10.26456/vtpmk732>

Введение

Надежность сложных технических систем зависит от эффективности функционирования всех элементов системы, их технической эксплуатации, своевременного технического обслуживания и восстановления в случае отказа. Существующие подходы [1] к организации технического обслуживания и восстановления технических систем с привлечением стационарных сервисных центров не всегда оказываются эффективными, так как не учитывают их мобильности и передислокацию в условиях быстро меняющейся стратегической и оперативно-тактической обстановки.

Кроме того, сервисные и ремонтные предприятия могут располагаться на значительном удалении от пунктов дислокации радиоэлектронных систем, а в формируемых зонах дислокации (для вновь создаваемых подразделений) возможности оперативной организации ремонта и сервисного обслуживания изделий, как правило, отсутствуют.

В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть возможности размещения на местности мобильного центра обслуживания (МЦО) технических систем, который обеспечивал бы оперативный ремонт и сервисное обслуживание всех элементов группировки (под элементом будем понимать позицию одного изделия). Для этого необходимо определить рациональное относительно элементов группировки технических систем местоположение позиции МЦО.

Задачам размещения объектов (таких как центров технического обслуживания и ремонта, логистических центров, баз хранения и другие) посвящены труды авторов: И.В. Григорьева, О.А. Куницкой, Н.В. Бедакова, В.П. Кочетковой, Л.П. Нагрузова, А.С. Дулесова, М.А. Прутовых, Н.А. Кочетовой, В.П. Мельникова, И.В. Кушнина, А.М. Гаджинского, Н. Кристофидеса, Е.В. Агеева, В.И. Козликина, В.М. Переверзева и других. В результате анализа существующих методов решения задачи о размещении выявлено, что все методы можно классифицировать по четырем группам: полного перебора, эвристические, методы определения центра тяжести и методы, основанные на графах. Первые три группы методов [2–8] не учитывают либо транспортную сеть местности, либо особенности предметной области в части применяемых критериев и параметров и в большинстве случаев требуют достаточную статистику для принятия решения о расположении МЦО. Решение данной задачи возможно с применением теории графов. В этом случае определение местоположения мобильного центра обслуживания технических систем будет эквивалентно задаче поиска абсолютного центра графа.

1. Метод Хакими

Под абсолютным центром графа понимается точка на ребре графа, расстояние от которой до наиболее удалённой вершины минимально [9–11]. Алгоритм нахождения абсолютного центра графа получил название минимаксного алгоритма [12]. Анализ предметной области показал, что наибольшее распространение в решении задачи поиска абсолютного центра графа получил метод Хакими, который предполагает два этапа.

На первом этапе на каждом ребре графа находится точка φ , имеющая наименьший эксцентриситет. Эксцентриситет точки φ представляет собой расстояние до максимально удалённой от неё вершины. На втором этапе из всех полученных точек φ выбирается точка с минимальным эксцентриситетом [9].

Обозначим расстояние (удаление) от вершины u_1 до точки φ на ребре $t_{1,2}$ как $\zeta = l(u_1, \varphi)$, а расстояние от вершины u_2 до точки φ на этом же ребре — $l(\varphi, u_2) = t_{1,2} - \zeta$, где ζ изменяется в диапазоне $0 \leq \zeta \leq t_{1,2}$ (Рис. 1).

Так как расстояние до вершины u_3 может быть вычислено, как через вершину u_1 , так и через вершину u_2 , то для одного и того же значения ζ могут быть получены два значения расстояния, которые в случае изменяющегося ζ могут быть

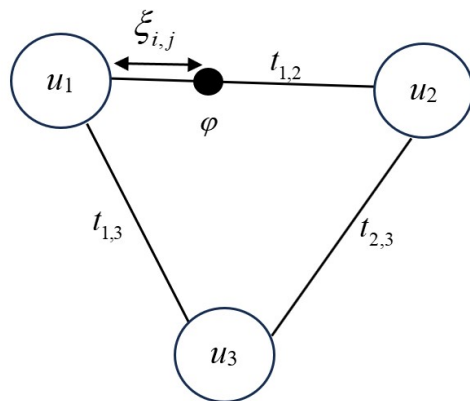


Рис. 1: Пояснение к нахождению точки

представлены парой функций:

$$\begin{aligned} f_3(\zeta) &= \zeta + t_{1,3}, \\ f'_3(\zeta) &= t_{1,2} - \zeta + t_{2,3}, \end{aligned}$$

где $f_3(\zeta)$ — функция, описывающая зависимость расстояния до вершины u_3 от удаления ζ точки φ , расположенной на ребре $t_{1,2}$, в которой вычисление расстояния производится через вершину u_1 , $f'_3(\zeta)$ — функция, описывающая зависимость расстояния до вершины u_3 от удаления ζ точки φ , расположенной на ребре $t_{1,2}$, в которой вычисление расстояния производится через вершину u_2 .

Такие функции рассчитываются для каждого ребра подграфа группировки. В результате для каждого ребра получим систему (1):

$$\begin{cases} f_i(\zeta) = \zeta + d(u_\alpha, u_i), \\ f'_i(\zeta) = t_{\alpha,\beta} - \zeta + d(u_\beta, u_i), \end{cases} \quad (1)$$

где i — номер вершины, до которой проводится расчёт расстояния, $d(u_\alpha, u_i)$ — расстояние от вершины u_α до вершины u_i .

Дальнейшее нахождение абсолютного центра методом Хакими решается графически. Описанный выше метод осуществляет поиск абсолютного центра графа вдоль всего ребра. В реальных задачах транспортная сеть местности имеет достаточно большой объём, что значительно увеличивает время поиска абсолютного центра. Один из оптимальных способов определения абсолютного центра на местности основан на формализованном описании группировки технических систем (ГТС), адаптированном к использованию метода Хакими. Это позволяет учитывать временные характеристики маршрутов транспортировки неработоспособных элементов между местоположениями МЦО и элементами ГТС и определить абсолютный центр графа ГТС.

2. Описание группировки технической системы

Способ формализованного описания группировки на местности основан на стя-

гивании ребер графа транспортной сети местности и перерасчете их весов с учетом параметров элементов ГТС путем нагрузки многопараметрическими динамическими весами, что позволяет определить временные характеристики маршрутов транспортировки неработоспособных элементов между местоположениями мобильного центра обслуживания и элементами группировки с учетом состояния элементов группировки, транспортной сети и средств доставки.

В таком случае исходными данными является совокупность стянутого взвешенного мультиграфа и подматриц достижимости группировки технических систем, то есть пространственно-временная модель, подробное описание которой рассмотрено в работах [13, 14].

Рассмотрим на примере задачу нахождения мобильного центра обслуживания группировки технической систем. Пусть имеется транспортная сеть. Граф транспортной сети, представленный на Рис. 2. Обслуживаемые подразделения обозначены вершинами графа, транспортные связи между подразделениями – ребрами. Каждое ребро графа нагружается временем движения транспортного средства от элемента к элементу соответственно (см. Рис. 2). Для построения пространственно-временной модели [14] транспортной сети местности осуществляется:

- определение физической транспортной сети на карте;
- построение неориентированного мультиграфа путей транспортной сети (Рис. 2);
- построение графа маршрутов транспортной сети (Рис. 3);
- формализованное описание графа маршрутов транспортной сети с помощью выражения (2);
- вычисление матрицы достижимости с помощью выражения (3).

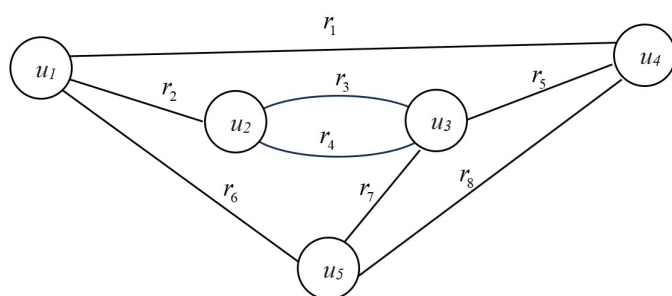


Рис. 2: Мультиграф транспортной сети

В результате получаем пространственно-временную модель местности, которая представляет собой совокупность математического описания графа маршрутов транспортной сети и матрицы достижимости, полученной на основе весовой матрицы смежности.

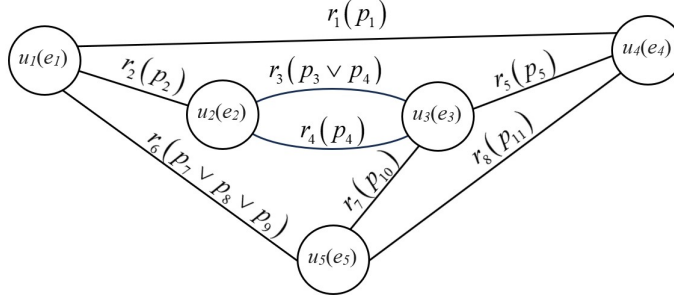


Рис. 3: Граф маршрутов ГТС

$$\begin{aligned}
 G_M &= \langle (U, E); (R, P) \rangle, \\
 U &= \{u_1, u_2, \dots, u_I\}, \quad E = \{e_1, e_2, \dots, e_I\}, \\
 R &= \{r_1, r_2, \dots, r_K\}, \quad P = \{p_1, p_2, \dots, p_L\}, \\
 e_i &= [t_i, c_i], \quad p_l = [r_k, s_k, \theta_n, \nu_k(\theta_n), g_k, c_k(\theta_n)], \quad \theta_n \in \Theta, \quad n = 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где G_M — граф маршрутов транспортной сети местности (ТСМ); U — множество вершин графа ТСМ мощности I ; R — множество ребер графа ТСМ мощности K ; E — множество весов вершин графа ТСМ; P — множество весов ребер графа ТСМ; t_i — время выполнения определенных действий в i -м узле ТСМ (например: дозаправка транспортного средства, оформление необходимых документов, перегрузка материальных ресурсов из одного транспортного средства в другое и т.д.); c_i — стоимость выполнения этих действий в i -м узле ТСМ; r_k — обозначение k -го участка пути ТСМ (ребра графа); s_k — протяженность k -го участка пути ТСМ; θ_n — тип транспортного средства, движущегося по участку пути ТСМ; $\nu_k(\theta_n)$ — средняя скорость движения n -го транспортного средства (ТСр), движущегося по k -му участку пути; g_k — коэффициент изменения скорости транспортного средства на k -м участке, учитывающий время года, время суток, климатические условия (дождь, туман, гололед и т.д.), в которых осуществляется движение; $c_k(\theta_n)$ — стоимость перевозки материально-технических ресурсов и (или) ремонтных бригад на конкретном типе ТСр за 1 км пути; N — количество транспортных средств.

$$D(G_M) = \begin{cases} m_{i,j}^h = \bigvee_h (e_i p_{x_h} e_{a_h} \dots p_{y_h} \dots p_{b_h} e_{z_h} e_j)_h, \\ h = 1, \dots, H_{i,j}; \forall h : e_i \neq e_{a_h} \neq \dots \neq e_{b_h} \neq e_j; e_i, e_{a_h}, e_{b_h}, e_j \in E, \\ p_{x_h}, p_{y_h} \in P; i = 1, 2, \dots, I; j = i + 1, \dots, I, i \neq j, \\ m_{i,j}^h = \bigvee_h (e_j p_{z_h} e_{b_h} \dots p_{y_h} \dots e_{a_h} p_{x_h} e_i)_h, \\ h = 1, \dots, H_{j,i}; \forall h : e_j \neq e_{b_h} \neq \dots \neq e_{a_h} \neq e_i; e_i, e_{a_h}, e_{b_h}, e_j \in E, \\ p_{x_h}, p_{y_h} \in P; j = 1, 2, \dots, I; i = j + 1, \dots, I, j \neq i, \end{cases} \tag{3}$$

где $D(G_M)$ — матрица достижимости графа маршрутов ТСМ; $m_{i,j}^h$ — h -й маршрут между i -й и j -й вершинами ТСМ; $H_{i,j}$ — множество маршрутов между i -й и j -й

вершинами графа ТСМ; e_a^h, e_b^h — промежуточные вершины между начальной и конечной вершиной маршрута; E' — вес ребра для каждого h -го маршрута.

Размещение на данной модели ГТС и ее формализованное описание состоит из следующих этапов:

- 1) Построение стянутого графа ГТС (Рис. 4):

$$\begin{aligned} G_\Gamma &= \langle (U', E'); (R', W) \rangle, & U' &= \{u_i \mid i = 1, 2, \dots, I\}, \\ R' &= \{r_k \mid k = 1, 2, \dots, K\}, & E' &= \{e'_1, e'_2, \dots, e'_I\}, \\ W &= \{w_1, w_2, \dots, w_L\}, \end{aligned}$$

где G_Γ — граф ГТС; U — множество вершин графа ГТС мощности I ; R — множество ребер ГТС мощности K ; E — множество весов вершин графа ГТС; W — множество весов ребер графа ГТС;

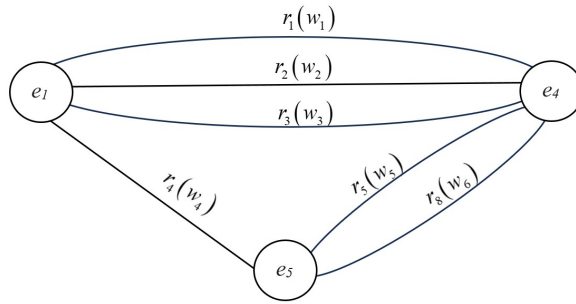


Рис. 4: Стянутый граф ГТС

- 2) Формирование матрицы достижимости из множества весов вершин графа (4); представление матрицы достижимости в виде набора подматриц достижимости (5); расчет времени выполнения операций на каждом h -м маршруте каждой подматрицы достижимости для адаптации к использованию метода Хакими (6):

$$D'(G_\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & m_{1,4} & m_{1,5} \\ m_{4,1} & 0 & m_{4,5} \\ m_{5,1} & m_{5,4} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$D'_z(G_\Gamma) = \begin{cases} m_{ij} = \left(e'_i w_{x_h} e_{a_h} \dots w_{y_h} \dots e_{b_h} w_{z_h} e'_j \right)_h; \\ h = 1, \dots, H_{ij}; \forall h : e'_i \neq e_{a_h} \neq \dots \neq e_{b_h} \neq e'_j; e'_i, e'_j \in E' \mid E' \subseteq E; \\ e_{a_h}, e_{b_h} \notin E' \mid E' \subseteq E, w_{x_h}, w_{y_h} \in W; i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, I; \\ \vdots \\ m_{ij} = \left(e'_i w_{x_h} e_{a_h} \dots w_{y_h} \dots e_{b_h} w_{z_h} e'_j \right)_h; \\ h = 1, \dots, H_{ij}; \forall h : e'_i \neq e_{a_h} \neq \dots \neq e_{b_h} \neq e'_j; e'_i, e'_j \in E' \mid E' \subseteq E; \\ e_{a_h}, e_{b_h} \notin E' \mid E' \subseteq E, w_{x_h}, w_{y_h} \in W; i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, I; \\ z = \overline{1, z}, Z = C_{e'}^H, H = \sum_{H_{ij}} \sum_h m_{ij}, e' \in E' \mid E' \subseteq E. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $D'_z(G_\Gamma)$ — подматрица достижимости графа ГТС; E' — подмножество вершин особого типа стянутого графа ГТС; W — множество весов ребер стянутого графа ГТС; Z — количество подматриц достижимости стянутого графа ГТС; H — количество маршрутов между элементами ГТС; e' — количество вершин особого типа (элементов группировки).

$$T_{TC_{i,j}}^h = \sum_i t_i + \sum_k \frac{S_k}{\nu_k(\theta_n)g_k} = \sum_i t_i + \sum_k t_{\text{движ}}^k, \quad (6)$$

где $T_{TC_{i,j}}^h$ — время выполнения определенных действий на всем маршруте ГТС; $t_{\text{движ}}^k$ — время движения на n -м типе транспортного средства на k -м участке маршрута; t_i — время задержки в i -м узле маршрута.

- 3) Описание пространственно-временной модели ГТС (7) и получения графа, адаптированного к использованию метода Хакими (8):

$$D''_z(G_\Gamma) = \begin{cases} m_{ij} = \left(e'_i t_{TC_{x_h}} e_{a_h} \dots t_{TC_{y_h}} \dots e_{b_h} t_{TC_{z_h}} e'_j \right)_h, \\ T_{TC_{i,j}}^h = \sum_i t_i + \sum_k t_{\text{движ}}^k; \\ h = 1, \dots, H_{ij}; \forall h : e'_i \neq e_{a_h} \neq \dots \neq e_{b_h} \neq e'_j; \\ e'_i, e'_j \in E' \mid E' \subseteq E; \\ e_{a_h}, e_{b_h} \notin E' \mid E' \subseteq E, t_{TC_{x_h}}, t_{TC_{y_h}} \in T_{TC}; \\ i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, I; \\ \vdots \\ m_{ij} = \left(e'_i t_{TC_{x_h}} e_{a_h} \dots \vee e_{b_h} t_{TC_{y_h}} e'_j \right)_h, \\ T_{TC_{i,j}}^h = \sum_i t_i + \sum_k t_{\text{движ}}^k; \\ h = 1, \dots, H_{ij}; \forall h : e'_i \neq e_{a_h} \neq \dots \neq e_{b_h} \neq e'_j; \\ e'_i, e'_j \in E' \mid E' \subseteq E; \\ e_{a_h}, e_{b_h} \notin E' \mid E' \subseteq E, t_{TC_{x_h}}, t_{TC_{y_h}} \in T_{TC}; \\ i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, I; \\ z = \overline{1, z}, Z = C_{e'}^H, H = \sum_{H_{ij}} \sum_h m_{ij}, e' \in E' \mid E' \subseteq E, \end{cases} \quad (7)$$

где $D''_z(G_\Gamma)$ — подматрицы достижимости пространственно-временной модели ГТС; $T_{TC_{i,j}}^h$ — вес стянутого ребра графа ГТС.

$$\begin{aligned} G_\Gamma &= \langle (U', E'); (R', T_{TC}) \rangle, \\ U' &= \{u'_1, u'_2, \dots, u'_i, \dots, u'_I\}, \quad E' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_i, \dots, e'_I\}, \\ R' &= \{r'_1, r'_2, \dots, r'_k, \dots, r'_K\}, \quad T_{TC} = \{t_{TC_1}, t_{TC_2}, \dots, t_{TC_i}, \dots, t_{TC_L}\}, \\ e'_i &= [t_i, c_i], \quad t_{TC_i} = [r_k, s_k, \theta_n, \nu_k(\theta_n), g_k, c_k(\theta_n)], \quad \theta_n \in \Theta; \end{aligned} \quad (8)$$

где G_Γ — адаптированный граф ГТС; U' — множество вершин адаптированного графа ГТС мощности I ; E' — множество весов вершин адаптированного графа ГТС; R' — множество рёбер адаптированного графа ГТС мощности K ; T_{TC} — множество весов рёбер адаптированного графа ГТС; e'_i — время задержки в i -ом узле маршрута; t_{TC_i} — время выполнения определённых действий на l -м участке маршрута.

В результате получаем пространственно-временную модель ГТС на местности, которая представляет собой совокупность математического описания стянутого графа ГТС и набора подматриц достижимости с однопараметрическими весами.

Определение абсолютного центра ГТС на местности состоит из нескольких этапов. На первом этапе вычисляется матрица расстояний для каждого подграфа группировки. На втором этапе определяются локальные абсолютные центры для всех ребер подграфа. На третьем этапе вычисляется абсолютный центр мультиграфа группировки. На четвертом этапе определяется местоположение абсолютного центра ГТС на местности. Рассмотрим каждый этап подробнее.

Вычисление матрицы расстояний заключается в: выделении подматрицы достижимости:

$$D'_1(G_\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & t_{TC_{1,4}}^1 & t_{TC_{1,5}}^1 \\ & 0 & t_{TC_{4,5}}^1 \\ & & 0 \end{pmatrix}; \quad (9)$$

формировании подграфа ГТС (Рис. 5):

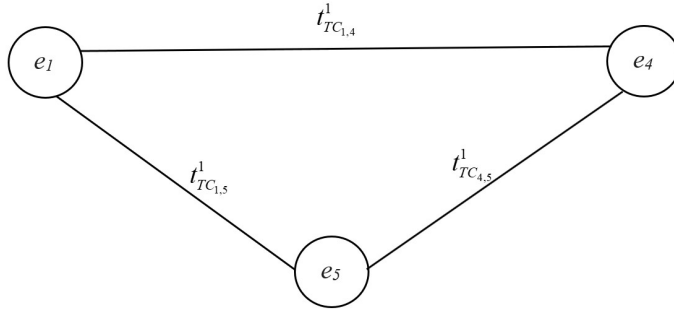


Рис. 5: Формирование подграфа ГТС

и вычислении матрицы «расстояний» подграфа ГТС (10).

Допустим $t_{TC_{1,4}}^1 = 50$, $t_{TC_{1,5}}^1 = 20$, $t_{TC_{4,5}}^1 = 90$,

$$A(G_\Gamma^z) = \left[\begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_4 & e_5 \\ \hline e_1 & 0 & 50 & 30 \\ e_4 & & 0 & 70 \\ e_5 & & & 0 \end{array} \right]. \quad (10)$$

3. Поиск абсолютного центра графа

Определение локальных абсолютных центров включает: выбор ребра подграфа ГТС (Рис. 6); расчет функций для выбранного ребра подграфа группировки (11), для представленного примера (12) и построение нижних (Рис. 7) и верхних огибающих для каждой вершины подграфа ГТС (Рис. 8).

$$\begin{cases} f_i(\xi_h) = \xi_h + d(e_\alpha, e_i), \\ f'_i(\xi_h) = t_{TC_{\alpha,\beta}} - \xi_h + d(e_\beta, e_i), \end{cases} \quad (11)$$

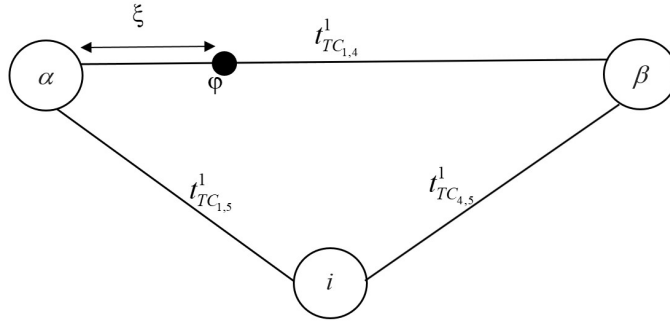


Рис. 6: Выбор ребра подграфа ГТС

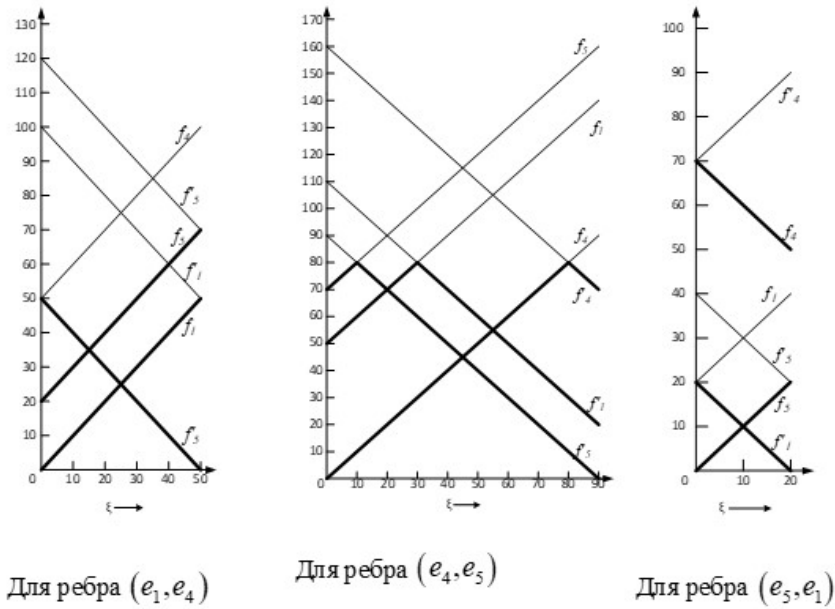


Рис. 7: Построение нижних огибающих для каждой вершины подграфа

где $f_i(\xi_h)$ — возрастающая функция; $f'_i(\xi_h)$ — убывающая функция; ξ_h — параметр ребра подграфа ГТС $\xi_h (0 \leq \xi \leq t_{\alpha, \beta})$; $t_{TC_{\alpha, \beta}}$ — вес рассматриваемого ребра подграфа ГТС; $d(e_j, e_i)$ — значение расстояний (времени доставки) до остальных вершин подграфа ГТС.

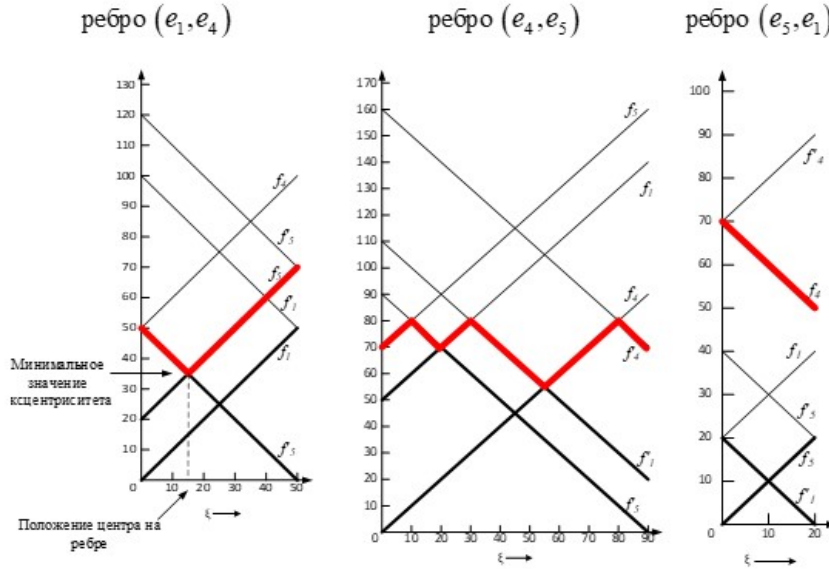


Рис. 8: Построение верхних огибающих для каждой вершины подграфа

$$\begin{cases} f_1(\xi_{1,4}) = \xi_{1,4}, \\ f'_1(\xi_{1,4}) = 100 - \xi_{1,4}, \\ f_4(\xi_{1,4}) = \xi_{1,4} + 50, \\ f'_4(\xi_{1,4}) = 50 - \xi_{1,4}, \\ f_5(\xi_{1,4}) = \xi_{1,4} + 20, \\ f'_5(\xi_{1,4}) = 120 - \xi_{1,4}. \end{cases} \quad \text{Для ребра } (e_1, e_4)$$

$$\begin{cases} f_1(\xi_{4,5}) = \xi_{4,5} + 50, \\ f'_1(\xi_{4,5}) = 110 - \xi_{4,5}, \\ f_4(\xi_{4,5}) = \xi_{4,5}, \\ f'_4(\xi_{4,5}) = 160 - \xi_{4,5}, \\ f_5(\xi_{4,5}) = \xi_{4,5} + 70, \\ f'_5(\xi_{4,5}) = 90 - \xi_{4,5}. \end{cases} \quad \text{Для ребра } (e_4, e_5)$$

$$\begin{cases} f_1(\xi_{5,1}) = \xi_{5,1} + 20, \\ f'_1(\xi_{5,1}) = 20 - \xi_{5,1}, \\ f_4(\xi_{5,1}) = \xi_{5,1} + 70, \\ f'_4(\xi_{5,1}) = 70 - \xi_{5,1}, \\ f_5(\xi_{5,1}) = \xi_{5,1}, \\ f'_5(\xi_{5,1}) = 40 - \xi_{5,1}. \end{cases} \quad \text{Для ребра } (e_5, e_1) \quad (12)$$

Определение абсолютного центра подграфа ГТС φ , для представленного примера (Рис. 9), основано на выборе минимального эксцентриситета из всех полученных с помощью верхних огибающих, то есть по критерию оптимальности.

Для рассматриваемого примера (см. Рис. 8) абсолютным центром выступает точка φ , имеющая наименьшее значение ординаты с абсциссой равной 15 ($\varphi = 15$) и расположенная на ребре $t_{TC1,4}$ подграфа ГТС (Рис. 9).

4. Определение местоположения центра обслуживания на местности

Определение местоположения абсолютного центра ГТС на местности заключается в: расщеплении графа ГТС (Рис. 10); аппроксимации маршрута временной кусочно-непрерывной функцией (Рис. 11), выражение (13), а в общем виде выра-

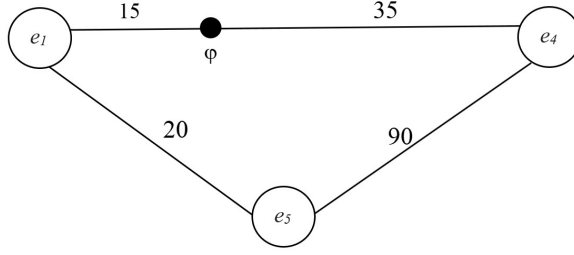


Рис. 9: Определение абсолютного центра ГТС

жение (14);

$$\Delta S = \begin{cases} f_1(\varphi) = 0, \text{ при } \varphi \leq t_1; \\ f_2(\varphi) = V_2(\varphi - t_1), \text{ при } t_1 < \varphi < \frac{S_1}{\nu_1} + t_1; \\ f_3(\varphi) = S_2, \text{ при } \frac{S_2}{\nu_2} + t_1 \leq \varphi \leq \frac{S_2}{\nu_2} + t_1 + t_2; \\ f_4(\varphi) = S_2 + V_3\left(\varphi - \frac{S_2}{\nu_2} - t_1 - t_2\right), \text{ при } \frac{S_2}{\nu_2} + t_1 + t_2 < \varphi < \frac{S_2}{\nu_2} + t_1 + t_2 + \frac{S_3}{\nu_3}; \\ f_5(\varphi) = S_2 + S_3, \text{ при } \frac{S_2}{\nu_2} + t_1 + t_2 + \frac{S_3}{\nu_3} \leq \varphi \leq \frac{S_2}{\nu_2} + t_1 + t_2 + t_3; \\ f_6(\varphi) = S_2 + S_3 + V_5\left(\varphi - t_1 - \frac{S_2}{\nu_2} - t_2 - \frac{S_3}{\nu_3} - t_3\right), \text{ при } \frac{S_2}{\nu_2} + \frac{S_3}{\nu_3} + t_1 + t_2 + t_3 + \frac{S_5}{\nu_5} < \varphi < \frac{S_2}{\nu_2} + t_1 + t_2 + \frac{S_3}{\nu_3} + \frac{S_5}{\nu_5} + t_4; \\ f_7(\varphi) = S_1 + S_2 + S_3, \text{ при } \frac{S_2}{\nu_2} + t_1 + t_2 + \frac{S_3}{\nu_3} + \frac{S_5}{\nu_5} + t_3 + \frac{S_5}{\nu_5} \leq \varphi < \frac{S_2}{\nu_2} + t_1 + t_2 + \frac{S_3}{\nu_3} + \frac{S_5}{\nu_5} + t_4; \end{cases} \quad (13)$$

$$\Delta S = \begin{cases} f_1(\varphi) = 0, \quad \varphi \leq t_i; \\ f_2(\varphi) = V_k(\varphi - t_i), \quad t_i < \varphi < \frac{S_k}{V_k} + t_i; \\ \vdots \\ f_{n-1}(\varphi) = \sum_{k=1} S_k + V_k(\varphi) - \sum_{k=1} \frac{S_k}{V_k} - \sum_{i=1} t_i, \\ \sum_{k=1} \frac{S_k}{V_k} + \sum_{i=1} t_i < \varphi < \sum_k \frac{S_k}{V_k} + \sum_{i=1} t_i; \\ f_n(\varphi) = \sum_k S_k, \quad \sum_k \frac{S_k}{V_k} + \sum_{i=1} t_i \leq \varphi \leq \sum_k \frac{S_k}{V_k} + \sum_i^n t_i, \end{cases} \quad (14)$$

где ΔS – расстояние, на котором размещен абсолютный центр ГТС; φ – значение местоположения абсолютного центра; $f_n(\varphi)$ – временная кусочно-непрерывная

функция; S_k – расстояние k -го участка маршрута; V_k – скорость транспортного средства на k -м участке маршрута; t_i – время задержки в i -ом узле маршрута.

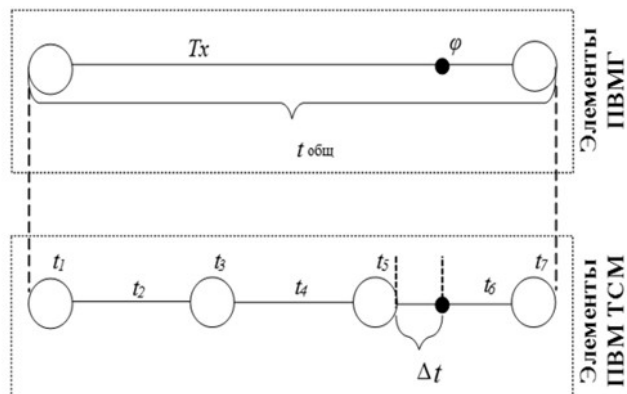


Рис. 10: Расщепление графа ГТС на примере одного ребра

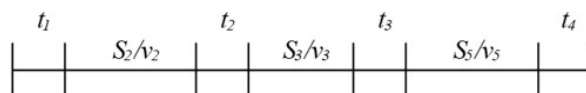


Рис. 11: Аппроксимация маршрута временными интервалами

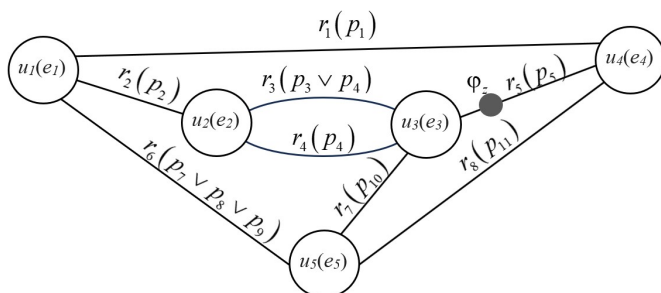


Рис. 12: Определение местоположения абсолютного центра на графе транспортной сети

Определении местоположения абсолютного центра на графе транспортной сети (Рис. 12) и определении местоположения абсолютного центра на физической

карте. В результате получаем оптимальное местоположение мобильного центра обслуживания ГТС.

Заключение

В статье описан способ поиска абсолютного центра графа транспортной сети, основанный на формализованном описании группировки на местности, адаптации полученного графа к применению метода Хакими, расщеплении графа группировки и аппроксимации маршрута временной кусочно-непрерывной функцией. Рассмотренный способ поиска оптимального местоположения центра обслуживания технической системы учитывает временные характеристики маршрутов транспортировки неработоспособных элементов между местоположениями МЦО и элементами ГТС, что позволяет значительно сократить среднее время ремонта и восстановления технических систем.

Список литературы

- [1] Дорохов А.Н., Керножицкий В.А., Миронов А.Н., Шестопалова О.Л. Обеспечение надежности сложных технических систем. СПб: Лань, 2016. 352 с.
- [2] Забудский Г.Г., Веремчук Н.С. Решение задачи Вебера на плоскости с минимаксным критерием и запрещенными зонами // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2014. Т. 9. С. 10–25.
- [3] Панюков А.В., Пельцвергер Б.Ф., Шафир А.Ю. Оптимальное размещение точек ветвления транспортной сети на цифровой модели местности // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. С. 153–162.
- [4] Розенберг И.Н. Теория и практика решения комплекса оптимизационных задач на сетях при нечетких данных в геоинформатике: дис. ... док. тех. наук. Москва, 2007. 329 с.
- [5] Шангин Р.Э. Точные и эвристические алгоритмы решения дискретной задачи Вебера для простого цикла // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14, № 2. С. 98–107.
- [6] Daskin M. A new approach to solving the vertex p-center problem to optimality: algorithm and computational results // Communications of the Operational Research Society of Japan. 2000. Vol. 45, № 9. Pp. 428–436.
- [7] Jacobsen S.K. An algorithm for the minimax Weber problem // European Journal of Operational Research. 1981. № 6. Pp. 144–148.
- [8] Wesolowsky G.O. The Weber problem: history and perspectives // Location Science. 1993. Vol. 1, № 1. Pp. 5–23.
- [9] Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1998. 432 с.

- [10] Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. М.: Мир, 1981. 323 с.
- [11] Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980. 336 с.
- [12] Филиппов Д.В. Исследование и решение минимаксных и минисуммных задач размещения на сетях: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 2004. 94 с.
- [13] Игнатьев С.В., Плакса Ю.А., Красников А.В., Дрожжин А.В. Модель группировки радиоэлектронных систем для оценки временных показателей надежности // Программные продукты и системы. 2018. № 3. С. 598–604.
- [14] Игнатьев С.В., Тихонов В.Б., Красников А.В., Осипов А.А. Пространственно-временная модель транспортной сети системы материально-технического обеспечения эксплуатации группировки радиоэлектронных средств // Программные продукты и системы. 2017. № 3. С. 510–517.

Образец цитирования

Игнатьев С.В., Плакса Ю.А., Курочкина С.А., Прусова Н.А. Абсолютный центр графа в задачах оптимального месторасположения мобильного центра обслуживания технических систем // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 2. С. 32–49. <https://doi.org/10.26456/vtpmk732>

Сведения об авторах

1. Игнатьев Сергей Владимирович

начальник кафедры автоматики и вычислительных средств Ярославского высшего военного училища противовоздушной обороны имени Маршала Советского Союза Л.А. Говорова.

Россия, 150001, г. Ярославль, Московский пр-т, д. 28, ЯВВУ ПВО им. Маршала Советского Союза Л.А. Говорова.

E-mail: Servladign@yandex.ru

2. Плакса Юрий Андреевич

доцент кафедры автоматики и вычислительных средств Ярославского высшего военного училища противовоздушной обороны имени Маршала Советского Союза Л.А. Говорова.

Россия, 150001, г. Ярославль, Московский пр-т, д. 28, ЯВВУ ПВО им. Маршала Советского Союза Л.А. Говорова.

E-mail: Plaksa-06@mail.ru

3. Курочкина Светлана Алексеевна

заведующий кафедрой математики Ярославского высшего военного училища противовоздушной обороны имени Маршала Советского Союза Л.А. Говорова.

Россия, 150001, г. Ярославль, Московский пр-т, д. 28, ЯВВУ ПВО им. Маршала Советского Союза Л.А. Говорова.

E-mail: svetlana_k_621@mail.ru

4. Прусова Наталия Александровна

доцент кафедры математики Ярославского высшего военного училища противоздушной обороны имени Маршала Советского Союза Л.А. Говорова.

Россия, 150001, г. Ярославль, Московский пр-т, д. 28, ЯВВУ ПВО им. Маршала Советского Союза Л.А. Говорова.

E-mail: Natali_pet@mail.ru

THE ABSOLUTE CENTER OF A GRAPH IN PROBLEMS OF OPTIMAL LOCATION OF A MOBILE SERVICE CENTER FOR TECHNICAL SYSTEMS

Ignatiev S.V., Plaksa Yu.A., Kurochkina S.A., Prusova N.A.

Yaroslavl Higher Military School of Air Defense named after Marshal of the Soviet
Union L.A. Govorov, Yaroslavl

Received 06.05.2025, revised 24.06.2025.

The problem of finding the optimal location of a mobile service center for technical systems is considered. The solution to this problem is based on the application of a minimax algorithm from graph theory. It is shown that the search for the optimal location of the mobile service center proceeds in several stages. The first stage involves a formalized description of the grouping of technical systems and obtaining a spatio-temporal model of the grouping, which consists of a multigraph and submatrices of reachability. At the second stage, the obtained multigraph is adapted for the use of the Hakimi method, and distance matrices are calculated. The third stage involves the search for local absolute centers of the graph and the computation of the absolute center of the graph. At the fourth stage, the location of the absolute center of the grouping of technical systems on the terrain is determined by approximating the route with a piecewise continuous temporal function.

Keywords: multigraph, reachability matrix, minimax algorithm, absolute center of a graph, Hakimi's method, service center for technical systems.

Citation

Ignatiev S.V., Plaksa Yu.A., Kurochkina S.A., Prusova N.A., "The absolute center of a graph in problems of optimal location of a mobile service center for technical systems", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2025, № 2, 32–49 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk732>

References

- [1] Dorokhov A.N., Kernozhiczkiy V.A., Mironov A.N., Shestopalova O.L., *Obespechenie nadezhnosti slozhnykh tekhnicheskikh sistem [Ensuring the reliability of complex technical systems]*, Lan Publ., SPb., 2016 (in Russian), 352 pp.
- [2] Zabudskiy G.G., Veremchuk N.S., "Solving the Weber problem on a plane with a minimax criterion and forbidden zones", *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika [Proceedings of Irkutsk State University. Series: Mathematics]*, **9** (2014), 10–25 (in Russian).

- [3] Panyukov A.V., Pel'czverger B.F., Shafir A.Yu., "Optimal placement of transport network branch points on a digital terrain model", *Avtomatika i telemekhanika [Automation and telemechanics]*, 1990, № 9, 153–162 (in Russian).
- [4] Rozenberg I.N., *Teoriya i praktika resheniya kompleksa optimizatsionny'kh zadach na setyakh pri nechetkikh danny'kh v geoinformatike*, dis. ... doctor of technical sciences, Moscow, 2007 (in Russian), 329 pp.
- [5] Shangin R.E., "Precise and heuristic algorithms for solving the discrete Weber problem for a simple loop", *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika [Bulletin of Novosibirsk State University. Series: Mathematics, Mechanics, Computer Science]*, 14:2 (2014), 98–107 (in Russian).
- [6] Daskin M., "A new approach to solving the vertex p-center problem to optimality: algorithm and computational results", *Communications of the Operational Research Society of Japan*, 45:9 (2000), 428–436.
- [7] Jacobsen S.K., "An algorithm for the minimax Weber problem", *European Journal of Operational Research*, 1981, № 6, 144–148.
- [8] Wesolowsky G.O., "The Weber problem: history and perspectives", *Location Science*, 1:1 (1993), 5–23.
- [9] Kristofides N., *Teoriya grafov. Algoritmicheskij podkhod [Graph theory. Algorithmic approach]*, Mir Publ., Moscow, 1998 (in Russian), 432 pp.
- [10] Majnika E., *Algoritmy optimizatsii na setyakh i grafakh [Optimization algorithms on networks and graphs]*, Mir Publ., Moscow, 1981, 323 pp.
- [11] Ore O., *Teoriya grafov [Graph theory]*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (in Russian), 336 pp.
- [12] Filippov D.V., *Issledovanie i reshenie minimaksny'kh i minisumny'kh zadach razmeshheniya na setyakh*, dis. ... candidate of Physical and Mathematical Sciences, Irkutsk, 2004 (in Russian), 94 pp.
- [13] Ignat'ev S.V., Plaksa Yu.A., Krasnikov A.V., Drozhzhin A.V., "A model for grouping radio-electronic systems for estimating temporal reliability indicators", *Programmny'e produkty i sistemy [Software products and systems]*, 2018, № 3, 598–604 (in Russian).
- [14] Ignat'ev S.V., Tikhonov V.B., Krasnikov A.V., Osipov A.A., "Spatial and temporal model of the transport network of the logistics support system for the operation of a group of electronic assets", *Programmny'e produkty i sistemy [Software products and systems]*, 2017, № 3, 510–517 (in Russian).

Author Info**1. Ignatiev Sergey Vladimirovich**

Head of the Department of Automation and Computer Engineering,
Yaroslavl Higher Military School of Air Defense named after Marshal of the Soviet
Union L.A. Govorov.

Russia, 150001, Yaroslavl, 28 Moskovsky Avenue.

E-mail: Servladign@yandex.ru

2. Plaksa Yuriy Andreevich

Associate Professor at the Department of Automation and Computer Engineering,
Yaroslavl Higher Military School of Air Defense named after Marshal of the Soviet
Union L.A. Govorov.

Russia, 150001, Yaroslavl, 28 Moskovsky Avenue.

E-mail: Plaksa-06@mail.ru

3. Kurochkina Svetlana Alekseevna

Head of the Department of Mathematics,
Yaroslavl Higher Military School of Air Defense named after Marshal of the Soviet
Union L.A. Govorov.

Russia, 150001, Yaroslavl, 28 Moskovsky Avenue.

E-mail: svetlana_k_621@mail.ru

4. Prusova Natalia Alexandrovna

Associate Professor at the Department of Mathematics,
Yaroslavl Higher Military School of Air Defense named after Marshal of the Soviet
Union L.A. Govorov.

Russia, 150001, Yaroslavl, 28 Moskovsky Avenue.

E-mail: Natali_pet@mail.ru