УДК 512.532.3, 519.173.2

СВОБОДНЫЕ КОММУТАТИВНЫЕ ПОЛУГРУППЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ ВЕРШИННО-ВНЕШНЕПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ КЭЛИ

Соломатин Д.В.
Омский государственный педагогический университет, г. Омск

Поступила в редакцию 28.03.2025, после переработки 20.08.2025.

Статья посвящена исследованию свободных коммутативных полугрупп, графы Кэли которых допускают вершинно-внешнепланарные вложения. Найдены необходимые и достаточные условия, налагаемые на количество образующих и на определяющие соотношения свободной коммутативной полугруппы, моноида и полугруппы с нулём, при которых её граф Кэли может быть отображён на плоскость так, что после удаления не более чем одной вершины все оставшиеся вершины принадлежат внешней грани и отсутствуют пересечения рёбер. Основные результаты настоящей статьи представлены в виде отдельных теорем, в которых доказаны характеристические свойства вершинной внешнепланарности графов Кэли свободных коммутативных полугрупп, моноидов и полугрупп с нулём в терминах копредставлений. Доказательства опираются на тот факт, что класс графов, обладающих вершинной внешнепланарностью, является минорно-замкнутым, и, следовательно, на основании теоремы Робертсона—Сеймура он определён конечным набором запрещённых графов. Этот замкнутый по минорам класс занимает промежуточное положение между внешнепланарными и планарными графами. Дин и Дзёбяк нашли все его 57 запрещённых миноров и опубликовали результаты в 2016 году. Установленная классификация подчёркивает тесную связь между топологическими свойствами графа Кэли и алгебраической сложностью полугруппы (числом образующих, количеством и формой определяющих соотношений, типом полугруппы, сложностью алгоритмов для задач над полугруппой). Этот факт существенен при построении графов в случаях, когда внешнепланарность обеспечивает возможность более наглядной визуализации. Описанная минимизация пересечений рёбер повышает эффективность прикладных исследований, находящихся на стыке графовой алгебры процессов и теории полугрупп.

Ключевые слова: полугруппа, моноид, полугруппа с нулём, граф Кэли полугруппы, вершинно-внешнепланарный граф, свободное коммутативное произведение.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 3. С. 25–44.
https://doi.org/10.26456/vtpmk740

Введение

Вершинно-внешнепланарные графы находят применение в различных областях науки и техники. Эти графы используются для моделирования и оптимизации электрических схем, где важно минимизировать пересечения проводников на плоскости. Они также полезны в задачах, тесно связанных с планарными графами и их визуализацией на плоскости. В сетевых топологиях такие графы могут использоваться для оптимального размещения узлов и связей между ними, избегая пересечений линий связи. Наконец, вершинно-внешнепланарные графы применяются для представления и анализа дорожных сетей и транспортных маршрутов. В связи с этим свободные коммутативные полугруппы, которые допускают вершинные внешнепланарные графы Кэли, представляют собой интересный объект изучения в области алгебры и теории графов. Такие структуры полезны для анализа и визуализации коммутативных полугрупп, что существенно помогает в понимании их свойств. Одним из главных преимуществ вершинно-внешнепланарных графов Кэли является их визуальная наглядность. Внешнепланарные графы позволяют легче представлять и анализировать отношения между элементами полугруппы в силу того, что все вершины такого графа принадлежат одной грани, называемой внешней гранью. Это упрощает доказательство различных теорем и исследование свойств полугрупп. Кроме того, рассматриваемые графы находят применение в теоретической информатике, комбинаторике и даже физике, так как помогают исследователям выявлять новые свойства и закономерности в структурах данных и алгоритмах.

1. Предварительные сведения

Для удобства читателя формулировку и доказательство основных результатов предварим необходимыми определениями и леммами.

Определение 1. *Пусть G — обыкновенный граф, ρ — вложение графа G в плоскость такое, что вершинам графа G ставятся в соответствие точки плоскости, а разным рёбрам соответствуют разные непрерывные плоские линии без самопересечений, не имеющие общих точек, кроме, возможно, общих вершин. При этом линия, соответствующая ребру (u, v), должна соединять точки, соответствующие вершинам u и v. Тогда пара (G, ρ) называется плоским графом.*

Определение 2. *Всякий граф, изоморфный плоскому, называется планарным графом.*

Определение 3. *Планарный граф, допускающий плоское вложение, при котором все вершины графа принадлежат одной (внешней) грани, называется внешнепланарным графом.*

Определение 4. *Граф, имеющий вершину, удаление которой превращает граф во внешнепланарный, называется вершинно-внешнепланарным графом.*

Определение 5. *Операция стягивания вершин графа определяется конструктивно следующим образом: удалим стягиваемые вершины и все рёбра, хотя бы один из концов которых принадлежит множеству стягиваемых вершин; добавим одну новую вершину; соединим добавленную вершину новыми рёбрами с каждым из оставшихся концов ранее удалённых рёбер.*

Определение 6. *Стягивание ребра — это стягивание вершин, являющихся его концами.*

Определение 7. *Минором графа называется граф, который можно получить из исходного путём удаления и стягивания рёбер.*

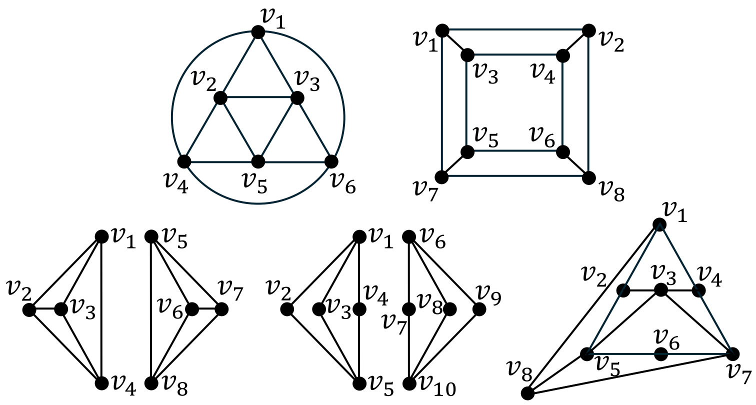

Рис. 1: *Графы Oct, Q (вверху) и $2K_4$, $2K_{2,3}$, Q_1 (внизу)*

Класс вершинно-внешнепланарных графов, будучи минорно-замкнутым, может быть охарактеризован на языке *запрещённых миноров*, то есть таких графов, отсутствие которых в качестве миноров эквивалентно свойству вершинной внешнепланарности. В [1] перечислены все 57 запрещённых миноров для характеристики свойства вершинной внешнепланарности. Представим некоторые из них на Рис. 1, чтобы использовать в дальнейшем при доказательствах теорем.

Определение 8. *Графом Кэли полугруппы $S = \langle X\rangle$ относительно множества образующих её элементов X называем такой ориентированный мультиграф $Cay\,(S, X) = (V, A)$ с помеченными дугами, что множество его вершин V совпадает с множеством элементов полугруппы S, а дуга $(a, x, b) \in A$ начинается в вершине $a \in S$, заканчивается в вершине $b \in S$ и помечена элементом $x \in X$ тогда и только тогда, когда в полугруппе S выполняется равенство $ax = b$.*

Определение 9. *Основой графа Кэли полугруппы $S = \langle X\rangle$ относительно множества образующих её элементов X называем такой обыкновенный граф $SCay\,(S, X) = (V, E)$, который получен из графа $Cay\,(S, X)$ путём удаления всех петель и всех меток, а также замены всех дуг, соединяющих одни и те же вершины, на единственное ребро, соединяющее те же вершины.*

Определение 10. *Говорим, что полугруппа S допускает вершинно-внешнепланарный граф Кэли, если относительно некоторого множества X образующих её элементов основа графа Кэли $SCay\,(S, X)$ является вершинно-внешнепланарным графом.*

Определение 11. *Полугруппа называется конечной свободной коммутативной полугруппой, если она конечна и является коммутативно-свободным произведением циклических полугрупп.*

Ясно, что конечная свободная коммутативная полугруппа имеет копредставление вида:

$$S = \big\langle a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\ \big|\ {a_i}^{r_i+m_i} = {a_i}^{r_i},\ a_i a_j = a_j a_i;\quad i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\big\rangle.$$

Здесь n, r_i и m_i — натуральные числа. Любой элемент s полугруппы S представим в виде $s = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}$, $\quad 0 \le k_i < r_i + m_i$ (считаем, что s^0 — пустой символ), в частности $|S| = \prod_{i=1}^{n}(r_i + m_i) - 1$. При этом множество $\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$ является множеством свободных образующих полугруппы S.

Определение 12. *Циклическим моноидом называется любой гомоморфный образ свободного моноида с одним образующим.*

Определение 13. *Конечный моноид называется свободным коммутативным моноидом, если он является свободным коммутативным произведением циклических моноидов в классе моноидов.*

Конечный свободный коммутативный моноид имеет в классе всех коммутативных моноидов копредставление следующего вида:

$$S = \big\langle a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\ \big|\ a_j^{m_j} = 1,\ {a_i}^{r_i+m_i} = {a_i}^{r_i},\ i \in I,\ j \in J\big\rangle.$$

Здесь множества индексов I и J удовлетворяют равенствам $I \cup J = \overline{1,\ n}$, $I \cap J = \emptyset$, $J \neq \emptyset$. Заметим, что соотношение вида $a_j^{m_j} = 1$ эквивалентно соотношениям вида: $a_j^{1+m_j} = a_j$, $a_k a_j^{m_j} = a_k$ для любого индекса $k \in \overline{1,\ n}$.

Определение 14. *Циклической полугруппой с нулём называется любой гомоморфный образ свободной однопорождённой полугруппы с нулём.*

Определение 15. *Конечная полугруппа с нулём называется свободной коммутативной полугруппой с нулём, если она является коммутативно-свободным произведением циклических полугрупп с нулём.*

Конечная свободная коммутативная полугруппа с нулём имеет в классе коммутативных полугрупп с нулём копредставление вида:

$$S = \big\langle a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\ \big|\ a_j^{r_j} = 0,\ {a_i}^{r_i+m_i} = {a_i}^{r_i},\ i \in I,\ j \in J\big\rangle.$$

При этом $I \cup J = \overline{1,\ n}$, $I \cap J = \emptyset$, $J \neq \emptyset$. Заметим, что соотношение вида $a_j^{r_j} = 0$ эквивалентно соотношениям вида: $a_j^{r_j+1} = a_j^{r_j}$, $\quad a_k a_j^{r_j} = a_j^{r_j}$ для любого $k \in \overline{1,\ n}$. Граф Кэли будем рассматривать относительно множества образующих, указанных в копредставлении; понятно, что это множество является множеством свободных образующих полугруппы S.

Определение 16. *Элемент s полугруппы S назовём превалирующим, если*

$$\forall\, r, h \in \mathbb{N},\ r \neq h\ \Rightarrow\ s^r \neq s^h.$$

Другими словами, степени превалирующего элемента попарно различны, и таких степеней в полугруппе неограниченно много.

Замечание 1. Наличие превалирующих образующих элементов полугруппы играет важную роль при описании бесконечных полугрупп с вершинно-внешнепланарными графами Кэли. Дело в том, что бесконечная полугруппа, допускающая вершинно-внешнепланарный граф Кэли, имеет не более одного превалирующего образующего элемента. В самом деле, если предположить противное, что существует хотя бы два превалирующих образующих элемента (a и b) в полугруппе S, то придём к выводу о том, что основа графа Кэли такой полугруппы содержит подграф, стягиваемый к $2K_4$ на следующих множествах вершин: $v_1 = \{a^6b,\ a^6, a^5,\ a^4\}$, $v_2 = \{a^5b\}$, $v_3 = \{a^6b^2, a^5b^2\}$, $v_4 = \{a^4b, a^4b^2\}$, $v_5 = \{a^3b, a^3, a^2, a\}$, $v_6 = \{a^2b\}$, $v_7 = \{a^3b^2, a^2b^2\}$, $v_8 = \{ab, ab^2\}$ — в обозначениях Рис. 1. Поэтому граф не является вершинно-внешнепланарным.

2. Основной результат

Формулировке и доказательству каждой из теорем ниже предпошлём леммы, содержащие характеристическое свойство соответствующих полугрупп с планарными графами Кэли, чтобы выбрать из имеющегося списка лишь те полугруппы, графы Кэли которых вершинно-внешнепланарны.

Лемма 1. *[2, Теорема 18]. Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S относительно множества свободных образующих планарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:*

1. $S = \langle a \mid a^{r+m} = a^r\rangle$, *где r и m — любые натуральные числа;*
2. $S = \left\langle a,\ b \;\middle|\; ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^{h+t} = b^h\right\rangle$, *где для натуральных r, m, h, t выполняется одно из следующих условий:*

   а) $m \le 2$, $t \le 2$;

   б) $r = 1$, $h = 1$, $t = 2$; или $r = 1$, $h = 2$, $t = 1$;

   в) $r = 1$, $h = 1$, $m = 2$; или $r = 2$, $h = 1$, $m = 1$;

   г) $r = 1$, $m = 1$; или $h = 1$, $t = 1$;
3. $S = \left\langle a,\ b,\ c \;\middle|\; ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^2 = a,\ b^2 = b,\ c^{k+l} = c^k\right\rangle$, *где k и l — натуральные числа, причём $l \le 2$.*

Теорема 1. *Конечная свободная коммутативная полугруппа S допускает вершинно-внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:*

1. $S = \langle a \mid a^{r+m} = a^r\rangle$, *где $r \ge 1$, $m \ge 1$.*
2. $S = \left\langle a,\ b \;\middle|\; ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^{h+t} = b^h\right\rangle$, *где для натуральных r, m, h, t выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

   а) $r = 1$, $m = 1$, $h \ge 1$, $t \le 2$; или $r \le 3 - m$, $m \le 2$, $h \le 6 - t$, $t \le 2$; или $r \le 4 - m$, $m \le 2$, $h \le 4 - t$, $t \le 2$;

   б) $r = 1$, $m \le 3$, $h + t = 3$;

   в) $r + m = 2$, $h \ge 1$, $t \le 3$;

   г) ограничение получено из 2.а)–2.в) заменой местами $(r; m)$ и $(h; t)$.

3. $S = \langle a,\ b,\ c \mid ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^2 = a,\ b^2 = b,\ c^2 = c\rangle$.

Доказательство. Для доказательства Теоремы 1 осуществим анализ каждого из условий Леммы 1 на предмет свойства вершинной внешнепланарности графов Кэли перечисленных полугрупп, допускающих планарные графы Кэли. Прежде чем приступить к такому анализу на Рис. 2, Рис. 3 и Рис. 4 приведём в общем виде схематичное изображение графов Кэли рассматриваемых полугрупп относительно одного, двух и трёх образующих соответственно.

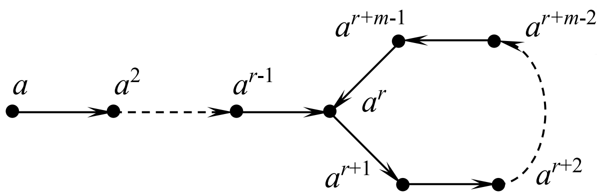

Рис. 2: *Граф Кэли циклической полугруппы типа* (r, m)

1) Граф Кэли любой циклической полугруппы внешнепланарен, следовательно, при любом $r \geq 1$ и $m \geq 1$ является вершинно-внешнепланарным по определению.

2.а) В графах Кэли полугрупп изоморфных полугруппе S, заданной своим копредставлением $S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^{h+t} = b^h\rangle$ при $r = 1$, $m = 1$, $h \geq 1$, $t \leq 2$ нет необходимости в удалении вершины, графы уже внешнепланарны. При $r = 1$, $m = 2$, $h = 3$, $t = 2$ или $h = 4$, $t = 1$ внешнепланарность появляется при удалении любой вершины из множества $\{b^2, b^3, a^2b^2, a^2b^3\}$. Например, для полугруппы $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^3 = a, b^5 = b^3\rangle$ граф Кэли содержит 14 вершин. Из Рис. 5 легко понять, почему он не является внешнепланарным и почему при удалении одной из вершин b^2, b^3, a^2b^2, a^2b^3 становится внешнепланарным. При $r = 1$, $m = 2$, $h = 4$, $t = 2$ или $h = 5$, $t = 1$ внешнепланарность появляется при удалении любой вершины из множества $\{b^3, a^2b^3\}$. При $r = m = h = t = 2$ внешнепланарность появляется при удалении вершины ab. Следовательно, в каждом из этих случаев граф вершинно-внешнепланарен. Дальнейшее увеличение значений параметров h или t приводит к появлению запрещённых миноров в графах Кэли, формирующихся полугрупп. А именно, для $r \geq 1$, $m = 2$, $h \geq 5$, $t = 2$ или $h \geq 6$, $t = 1$ получается граф $2K_4$ в результате стягивания вершин из следующих множеств: $v_1 = \{a^2b^6, a^2b^5, a^2b^4\}$, $v_2 = \{ab^6\}$, $v_3 = \{ab^5\}$, $v_4 = \{b^6,\ b^5,\ b^4,\ ab^4\}$, $v_5 = \{a^2b^3,\ ab^3\}$, $v_6 = \{a^2b^2, a^2b\}$, $v_7 = \{ab^2\}$, $v_8 = \{b^3, b^2, b, ab, a, a^2\}$. Для $r \geq 2$, $m = 2$, $h \geq 3$, $t = 2$ или $h \geq 4$, $t = 1$ получается граф Oct в результате стягивания вершин из следующих множеств: $v_1 = \{a^3b^4,\ a^2b^4, ab^4, b^4, b^3, b^2\}$, $v_2 = \{a^3b^3, a^3b^2, a^3b\}$, $v_3 = \{a^2b^3, ab^3\}$, $v_4 = \{ab^2\}$, $v_5 = \{a^2b^2\}$, $v_6 = \{a^2b,\ ab, b\}$ в обозначениях Рис. 1.

2.б) Удаление вершины ab в графе Кэли полугруппы S, заданной своим копредставлением $S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^{h+t} = b^h\rangle$ при $r = 1$, $m = 3$, $h = 2$, $t = 1$, приводит к получению внешнепланарного графа, следовательно, исходный граф является вершинно-внешнепланарным. Увеличение параметра $m \geq 4$ влечёт за собой формирование графа Q_1 в результате стягивания вершин из следующих множеств: $v_1 = \{a^3\}$, $v_2 = \{a^3b\}$, $v_3 = \{a^4b\}$, $v_4 = \{a^4\}$, $v_5 = \{a^4b^2, a^3b^2, ab^2\}$, $v_6 = \{b^2\}$, $v_7 = \{a, ab, b\}$, $v_8 = \{a^2, a^2b, a^2b^2\}$ в обозначениях Рис. 1.

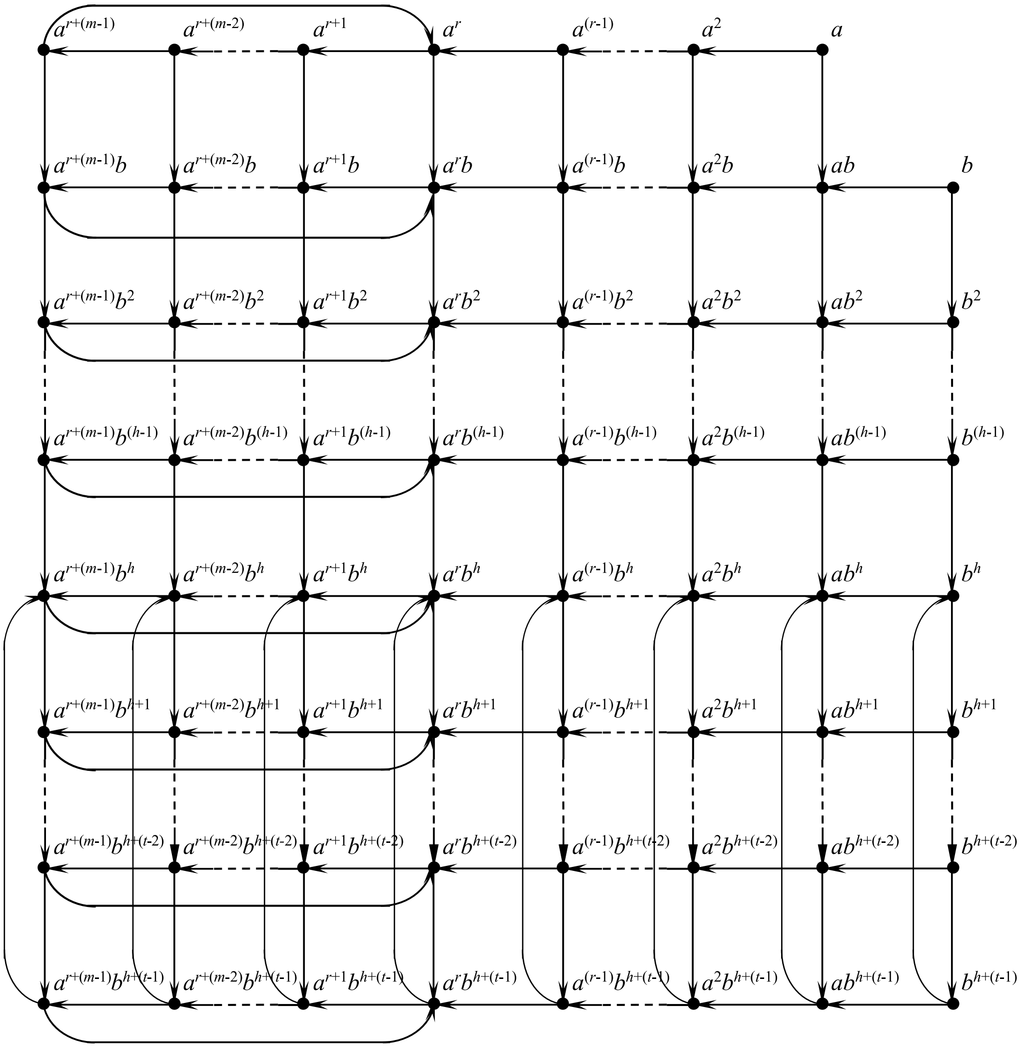

Рис. 3: *Общий вид графа Кэли конечной полугруппы, заданной копредставлением* $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h \rangle$

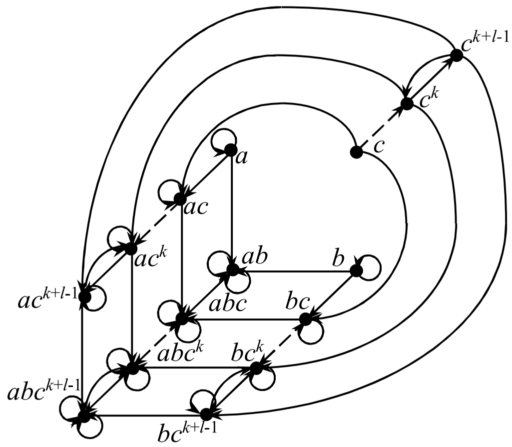

Рис. 4: *Планарный граф Кэли 3-порождённой полугруппы, заданной копредставлением* $S = \left\langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^{k+l} = c^k \right\rangle$

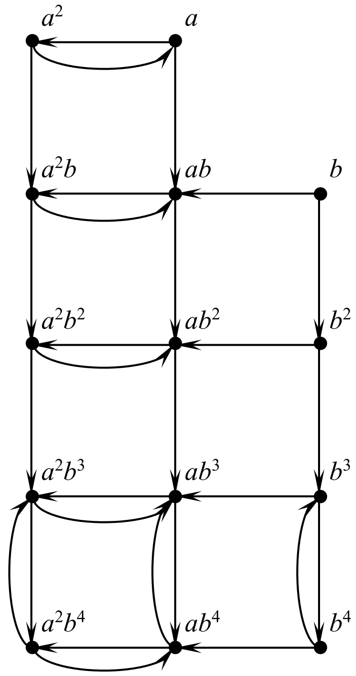

Рис. 5: *Планарный граф Кэли 2-порождённой полугруппы, заданной копредставлением* $S = \left\langle a, b \mid ab = ba, a^3 = a, b^5 = b^3 \right\rangle$

2.в) Не теряя общности, положим $h = t = 1$, так как случай $r = m = 1$ описывается с точностью до изоморфизма. При $r \geq 1$, $m = 2$ граф Кэли соответствующей полугруппы внешнепланарен, а при $m = 3$ для получения внешнепланарного графа достаточно удалить вершину a^r или $a^r b$, следовательно, граф вершинно-внешнепланарен. Дальнейшее увеличение параметра $m \geq 4$ приводит к появлению минора Q в результате стягивания вершин из следующих множеств: $v_1 = \{a^r\}$, $v_2 = \{a^{r+1}\}$, $v_3 = \{a^{r+3}, \ldots, a^{r+m-1}\}$, $v_4 = \{a^{r+2}\}$, $v_5 = \{a^{r+3}b, \ldots, a^{r+m-1}b\}$, $v_6 = \{a^{r+2}b\}$, $v_7 = \{a^r b\}$, $v_8 = \{a^{r+1}b\}$ в обозначениях Рис. 1.

2.г) Полугруппы данной серии изоморфны полугруппам, описанным в пунктах 2.а)–2.в), и получаются из них последовательным присваиванием $r := r + h$, $h := r - h$, $r := r - h$, $m := m + t$, $t := m - t$, $m := m - t$, которое приводит к обмену значений пар (r, m) и (h, t).

3) При $k = l = 1$ в графе Кэли полугруппы S, заданной своим копредставлением вида $S = \big\langle a,\ b,\ c \mid ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^2 = a,\ b^2 = b,\ c^{k+l} = c^k \big\rangle$, если удалить хотя бы одну из вершин c, abc, ac или bc, то граф становится внешнепланарным. Но уже при $k \geq 1$, $l = 2$ или $k \geq 2$, $l = 1$ в основе графа Кэли этой полугруппы обнаруживается подграф, стягиваемый к графу Q на следующих множествах вершин: $v_1 = \{c\}$, $v_2 = \{bc\}$, $v_3 = \{ac\}$, $v_4 = \{abc\}$, $v_5 = \{ac^2\}$, $v_6 = \{abc^2\}$, $v_7 = \{c^2\}$, $v_8 = \{bc^2\}$ — в обозначениях Рис. 1. Следовательно, он не является вершинно-внешнепланарным.

Что и требовалось доказать. □

На основании замечания 1 к определению 16 выберем из Теоремы 1 бесконечные полугруппы, имеющие не более одного превалирующего образующего, чтобы получить Следствие 1.

Следствие 1. Бесконечная полугруппа S, являющаяся коммутативно-свободным произведением циклических полугрупп, имеет планарный граф Кэли относительно множества свободных образующих тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:

1. $S = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, то есть S — бесконечная циклическая полугруппа;
2. $S = \big\langle a,\ b \ \big|\ ab = ba,\ a^2 = a \big\rangle$.

Лемма 2. *[2, Теорема 19]. Граф Кэли конечного свободного коммутативного моноида S относительно множества свободных образующих планарен тогда и только тогда, когда S задан копредставлением одного из следующих видов:*

1. $S = \langle a \mid a^m = 1 \rangle$, где m — любое натуральное число;

2. 1. $S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^t = 1 \rangle$, где для натуральных r, m, t выполнено одно из следующих ограничений:
а) $t \leq 2$; б) $m \leq 2$, $t > 2$;

2. $S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^m = 1,\ b^t = 1 \rangle$, где m и t — натуральные числа, причём $t \leq 2$;

3. 1. $S = \big\langle a,\ b,\ c \ \big|\ ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^{r+m} = a^r,\ b^{h+t} = b^h,\ c^k = 1 \big\rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k выполнено одно из следующих ограничений:
а) $h = 1$, $t = 1$, $k = 1$; б) $m \leq 2$, $t \leq 2$, $k = 1$; в) $m \leq 2$, $h = 1$, $t = 1$, $k = 2$;

2. $S = \left\langle a,\ b,\ c\ \middle|\ ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^{r+m} = a^r,\ b^2 = 1,\ c^2 = 1\right\rangle$, *где* r *и* m *— натуральные числа, причём* $m \le 2$*;*

3. $S = \left\langle a,\ b,\ c\ \middle|\ ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^2 = 1,\ b^2 = 1,\ c^2 = 1\right\rangle$*;*

4. $S = \langle a,\ b,\ c,\ d \mid ab = ba,\ ac = ca,\ ad = da,\ bc = cb,\ bd = db,\ cd = dc,\ a^{r+m} = a^r,\ b^2 = b,\ c^2 = c,\ d = 1\rangle$, *где* r *и* m *— натуральные числа, причём* $m \le 2$.

Теорема 2. *Граф Кэли конечного свободного коммутативного моноида* S *относительно множества свободных образующих является вершинно-внешнепланарным тогда и только тогда, когда* S *задан копредставлением одного из следующих видов:*

1. $S = \langle a \mid a^m = 1\rangle$, *где* m *— любое натуральное число;*

2. *1.* $S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^t = 1\rangle$, *где для натуральных* $r,\ m,\ t$ *выполнено одно из следующих ограничений:*

а) $r \ge 1,\ m \ge 1,\ t = 1$*; или* $r \ge 1,\ m \le 3,\ t = 2$*;*

б) $r + m = 3,\ t = 3$*;*

2. $S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^m = 1,\ b^t = 1\rangle$, *где* m *и* t *— натуральные числа, причём* $m \ge 1,\ t = 1$ *или* $m \le 3,\ t = 2$*;*

3. $S = \left\langle a,\ b,\ c\ \middle|\ ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^{r+m} = a^r,\ b^{h+t} = b^h,\ c^k = 1\right\rangle$, *где для натуральных* $r,\ m,\ h,\ t,\ k$ *выполнено хотя бы одно из следующих ограничений:*

а) $r \ge 1,\ m \le 3,\ h + t + k = 3$*;*

б) $r \ge 1,\ m \le 2,\ h + t = 2,\ k = 1$*; или* $r + m \le 5,\ m \le 2,\ h + t = 3,\ k = 1$.

Доказательство. Для большей наглядности на Рис. 6, Рис. 7 и Рис. 8 приведём в общем виде схематичное изображение графов Кэли рассматриваемых моноидов относительно одного, двух и трёх образующих соответственно.

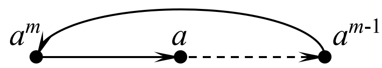

Рис. 6: *Граф Кэли циклического моноида* $S = \langle a \mid a^m = 1\rangle$

1) Граф Кэли всякого циклического моноида $S = \langle a \mid a^m = 1\rangle$ внешнепланарен, следовательно, при любом $m \ge 1$ считается вершинно-внешнепланарным по определению.

2.1.а) Граф Кэли полугруппы $S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^t = 1\rangle$ при $r \ge 1,\ m \ge 1,\ t = 1$ внешнепланарен, следовательно, считается вершинно-внешнепланарным по определению. Для $r \ge 1,\ m \le 3,\ t = 2$ к появлению свойства внешнепланарности приводит удаление вершины a^r или $a^r b$. В оставшемся случае $r \ge 1,\ m \ge 4,\ t = 2$ основа графа Кэли анализируемой полугруппы содержит подграф, стягиваемый к графу Q на следующих множествах вершин: $v_1 = \{a^r\}$, $v_2 = \{a^{r+m-1}\}$, $v_3 = \{a^{r+1}, \ldots, a^{r+m-3}\}$, $v_4 = \{a^{r+m-2}\}$, $v_5 = \{a^{r+1}b, \ldots, a^{r+m-3}b\}$, $v_6 = \{a^{r+m-2}b\}$, $v_7 = \{a^r b\}$, $v_8 = \{a^{r+m-1}b\}$, в обозначениях Рис. 1 — следовательно, не является вершинно-внешнепланарным.

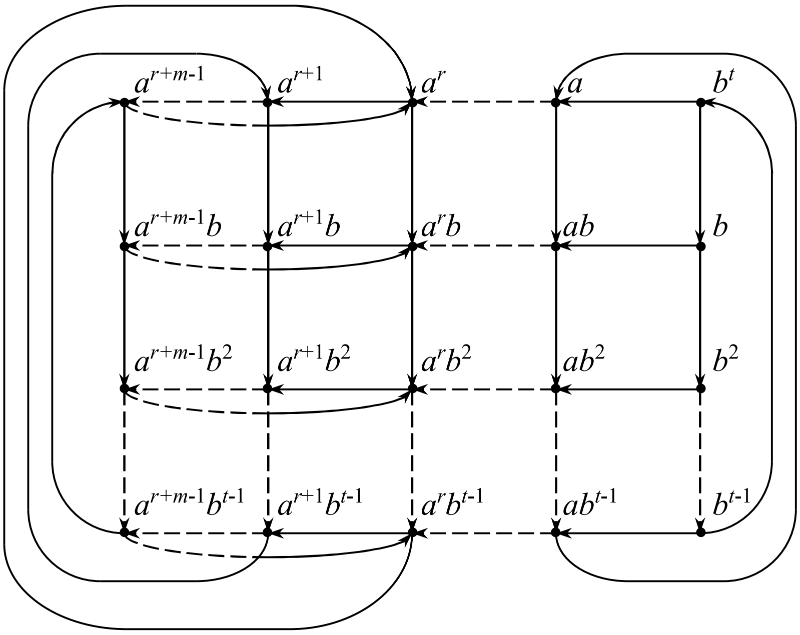

Рис. 7: *Граф Кэли коммутативного моноида* $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^t = 1\rangle$

2.1.б) Для $r + m = 3$, $t = 3$ к появлению свойства внешнепланарности основы графа Кэли полугруппы $S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^t = 1\rangle$ приводит удаление вершины a. В случаях $r + m > 3$, $m \leq 2$, $t = 3$ обнаруживается запрещённый подграф, стягиваемый к графу $2K_{2,3}$ на следующих множествах вершин: $v_1 = \{b^2\}$, $v_2 = \{ab^2\}$, $v_3 = \{1, b\}$, $v_4 = \{a\}$, $v_5 = \{ab\}$, $v_6 = \{a^2b\}$, $v_7 = \{a^2b^2, a^3b^2\}$, $v_8 = \{a^3b\}$, $v_9 = \{a^2\}$, $v_{10} = \{a^3\}$, в обозначениях Рис. 1. В оставшихся случаях при $t \geq 4$ в основе графа Кэли обнаруживается запрещённый подграф, стягиваемый к графу Q на множествах вершин: $v_1 = \{b^3, \ldots, b^{t-1}\}$, $v_2 = \{b^2\}$, $v_3 = \{1\}$, $v_4 = \{b\}$, $v_5 = \{a\}$, $v_6 = \{ab\}$, $v_7 = \{ab^3, \ldots, ab^{t-1}\}$, $v_8 = \{ab^2\}$, в обозначениях Рис. 1 — следовательно, не является вершинно-внешнепланарным.

2.2) Граф Кэли полугруппы $S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^m = 1,\ b^t = 1\rangle$, где m и t — натуральные числа, при $m \geq 1$, $t = 1$ или при $m \leq 2$, $t = 2$ является внешнепланарным. Для $m = 3$, $t = 2$ удаление любой вершины в получающемся шестиэлементном графе приводит к появлению свойства внешнепланарности. Оставшиеся случаи $m \geq 4$ влекут появление подграфа, стягиваемого к графу Q на следующих множествах вершин: $v_1 = \{1\}$, $v_2 = \{a\}$, $v_3 = \{a^3, \ldots, a^{m-1}\}$, $v_4 = \{a^2\}$, $v_5 = \{a^3b, \ldots, a^{m-1}b\}$, $v_6 = \{a^2b\}$, $v_7 = \{b\}$, $v_8 = \{ab\}$, в обозначениях Рис. 1 — следовательно, не является вершинно-внешнепланарным.

3.1.а) Граф Кэли полугруппы S, заданной своим копредставлением в виде $S = \big\langle a,\ b,\ c\ \big|\ ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^{r+m} = a^r,\ b^{h+t} = b^h,\ c^k = 1\big\rangle$, при натуральных $r \geq 1$, $m \leq 3$ и $h+t+k = 3$, становится внешнепланарным после удаления вершин a^r или b^h. При $m \geq 4$ содержит в своей основе подграф, стягиваемый к графу Q на следующих множествах вершин: $v_1 = \{a^r\}$, $v_2 = \{a^{r+1},\ \ldots, a^{r+m-3}\}$,

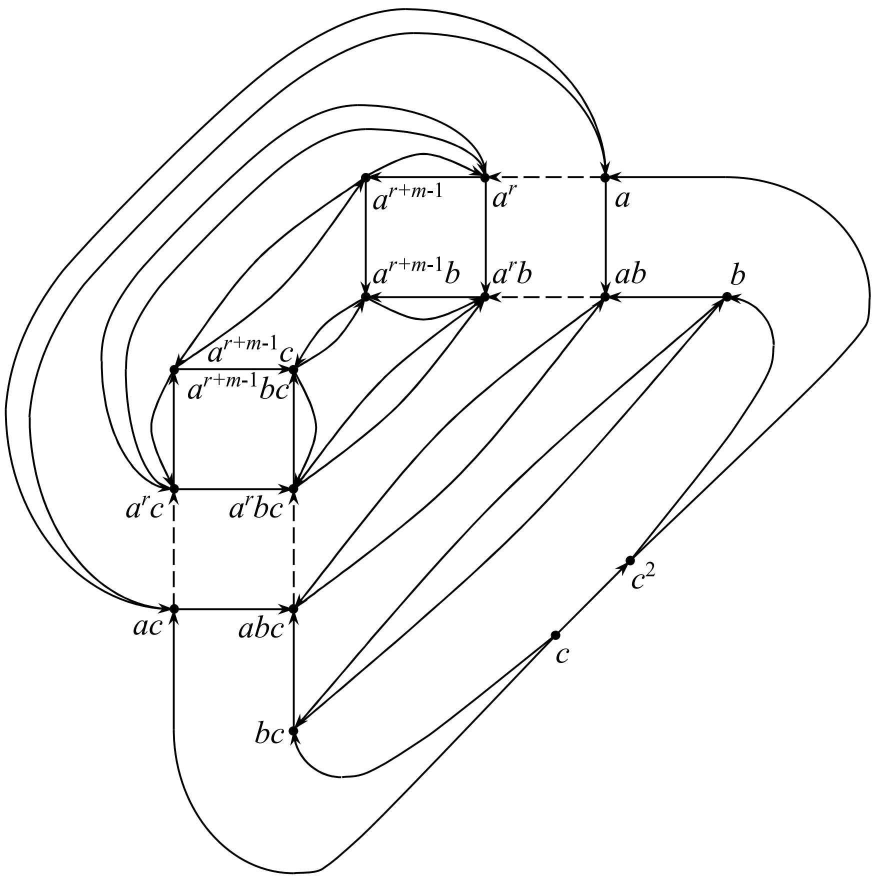

Рис. 8: *Граф Кэли 3-порождённого коммутативного моноида, заданного копредставлением* $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^2 = b, c^2 = 1 \rangle$

$v_3 = \{a^{r+m-1}\}$, $v_4 = \{a^{r+m-2}\}$, $v_5 = \{a^{r+m-1}b\}$, $v_6 = \{a^{r+m-2}b\}$, $v_7 = \{a^r b\}$, $v_8 = \{a^{r+1}b, \ \dots, a^{r+m-3}b\}$, в обозначениях Рис. 1 — следовательно, не является вершинно-внешнепланарным.

3.1.б) При $r \geq 1$, $m \leq 2$, $h = t = 1$ граф Кэли рассматриваемой полугруппы $S = \langle a, \ b, \ c \ \big| \ ab = ba, \ ac = ca, \ bc = cb, \ a^{r+m} = a^r, \ b^{h+t} = b^h, \ c^k = 1 \rangle$ внешнепланарен, как и при значениях $r = m = 1$, $h+t = 3$. Для $r+m = 3$, $h+t = 3$ удаление любой из девяти вершин приводит к внешнепланарному графу. Для $r = m = 2$ или $r = 3$, $m = 2$, при условии $h + t = 3$, к внешнепланарному графу приводит удаление любой вершины множества $\{a, a^2, ab^2, a^2b^2\}$. Для $r = 4$, $m = 1$, при условии $h + t = 3$, к внешнепланарному графу приводит удаление любой вершины множества $\{a^2, a^2b^2\}$. Наконец, для $r = 4$, $m = 2$ или $r \geq 5$, $m \geq 1$, при условии $h + t = 3$ как прежде, в основе графа Кэли анализируемой полугруппы обнаруживается стягиваемый к графу $2K_4$ подграф на следующих множествах вершин: $v_1 = \{a^5b, a^5, a^4, a^3\}$, $v_2 = \{a^4b\}$, $v_3 = \{a^5b^2, a^4b^2\}$, $v_4 = \{a^3b, \ a^3b^2\}$, $v_5 = \{a^2b, a^2, a, c\}$, $v_6 = \{ab\}$, $v_7 = \{a^2b^2, ab^2\}$, $v_8 = \{b, b^2\}$, в обозначениях Рис. 1 — следовательно, не является вершинно-внешнепланарным.

3.1.в), 3.2), 3.3), 4). В каждом из заключительных случаев, описанных Леммой 2, основа графа Кэли полугруппы S содержит запрещённый подграф, стягиваемый к графу Q на следующих одноэлементных множествах вершин: $v_1 = \{a\}$, $v_2 = \{ab\}$, $v_3 = \{1\}$, $v_4 = \{b\}$, $v_5 = \{c\}$, $v_6 = \{bc\}$, $v_7 = \{ac\}$, $v_8 = \{abc\}$, в обозначениях Рис. 1 — следовательно, не является вершинно-внешнепланарным.

Что и требовалось доказать. □

Исходя из замечания 1 к определению 16, из множества бесконечных полугрупп, присутствующих в Теореме 2, выделим подкласс структур, содержащих не более одного превалирующего образующего элемента; тогда для этого подкласса непосредственно следует Следствие 2.

Следствие 2. Бесконечный моноид S, являющийся коммутативно-свободным произведением циклических моноидов в классе всех моноидов, имеет вершинно-внешнепланарный граф Кэли относительно множества свободных образующих тогда и только тогда, когда S задан копредставлением одного из следующих видов:

1. $S = \langle a, \ b \mid \ b = 1 \rangle$;
2. $S = \langle a, \ b \ \big| \ b^2 = 1 \rangle$;
3. $S = \langle a, \ b, \ c \ \big| \ b^2 = b, \ c = 1 \rangle$.

В следующей лемме дополним результат [2, Теорема 20] о произведении нетривиальных полугрупп пунктом 5, содержащим новую серию конечных свободных коммутативных полугрупп S с нулём 0, допускающих планарные графы Кэли относительно множества свободных образующих, уточняя тем самым формулировку результата из [3, Теорема 2] для получения Следствия 3 соответствующей Теоремы 3 ниже.

Лемма 3. *Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S с нулём 0 относительно множества свободных образующих планарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:*

1. $S = \langle a \ \mid \ a^r = 0 \rangle$, *где r — любое натуральное число;*

2. *$S = \langle a, b \mid ab = ba,\ a^r = 0,\ b^h = 0\rangle$, где r, h — любые натуральные числа;*

3. *$S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^h = 0\rangle$, где r, m, h — натуральные числа, причём $m \le 2$, либо $r = 1$ и $h = 1$;*

4. *$S = \langle a,\ b,\ c \mid ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^2 = a,\ b^2 = b,\ c^k = 0\rangle$, где k — любое натуральное число;*

5. *$S = \langle a,\ b,\ c \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^2 = b,\ c = 0\rangle$, где $m \le 2$, а r — любое натуральное число.*

Проанализируем дополнительный пункт 5, отсутствующий в раннем результате [3, Теорема 2]. В самом деле, граф Кэли полугруппы S, заданной копредставлением $S = \langle a,\ b,\ c \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^2 = b,\ c = 0\rangle$, для $m \le 2$ при любом натуральном r имеет плоскую укладку, получаемую путём добавления вершины 0 к внешнепланарной укладке графа полугруппы S заданной копредставлением $S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^2 = b\rangle$, где $m \le 2$, с последующим соединением каждой его вершины с вершиной 0 новыми ребрами. При $m \ge 3$ в основе графа Кэли анализируемой полугруппы обнаруживается полный двудольный подграф $K_{3,3}$ на вершинах из множества $\{0, a^{r+1}b, a^{r+2}\}$ в первой доле и вершинах из множества $\{a^r, a^{r+1}, a^{r+2}b\}$ во второй доле, соединённых следующими девятью попарно непересекающимися простыми маршрутами: $0 - a^r$, $0 - a^{r+1}$, $0 - a^{r+2}b$, $a^{r+1}b - a^r b - a^r$, $a^{r+1}b - a^{r+1}$, $a^{r+1}b - a^{r+2}b$, $a^{r+2} - \cdots - a^{r+m-1} - a^r$, $a^{r+2} - a^{r+1}$, $a^{r+2} - a^{r+2}b$, следовательно, по теореме Понтрягина—Куратовского он не является планарным.

Теорема 3. *Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S с нулём 0 относительно множества свободных образующих является вершинно-внешнепланарным тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:*

1. *$S = \langle a \mid a^r = 0\rangle$, где r — любое натуральное число;*

2. *$S = \langle a, b \mid ab = ba,\ a^r = 0,\ b^h = 0\rangle$, где $r \le 2$ или $h \le 2$, или $r = h = 3$;*

3. *$S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^h = 0\rangle$, где $r+m = 2$ или $(r+m = 3,\ h \le 5)$, или $(r + m = 4,\ m \le 2,\ h \le 3)$, или $(m \le 2,\ h \le 2)$, или $r = h = 1$;*

4. *$S = \langle a,\ b,\ c \mid ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^2 = a,\ b^2 = b,\ c^k = 0\rangle$, где $k \le 2$;*

5. *$S = \langle a,\ b,\ c \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^2 = b,\ c = 0\rangle$, где $m \le 2$, а r — любое натуральное число.*

Доказательство. Прежде чем приступить к анализу каждого из представленных в Лемме 3 вариантов, проиллюстрируем доказательство теоремы, приведя на Рис. 9, Рис. 10 и Рис. 11 в общем виде схематичное изображение графов Кэли конечных свободных коммутативных полугрупп с нулём относительно одного, двух и трёх образующих соответственно.

1) Основа графа Кэли полугруппы $S = \langle a \mid a^r = 0\rangle$, где r — любое натуральное число, является внешнепланарным графом, следовательно, по определению принадлежит к классу вершинно-внешнепланарных графов.

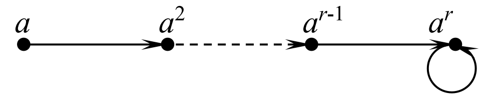

Рис. 9: *Граф Кэли полугруппы* $S = \langle a \mid a^r = 0 \rangle$

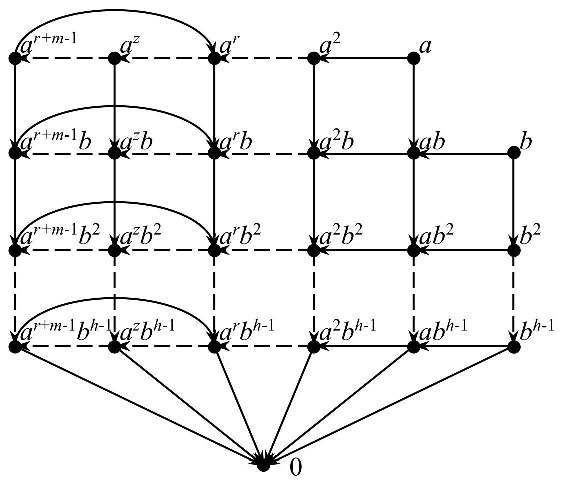

Рис. 10: *Граф Кэли полугруппы* $S = \left\langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^h = 0 \right\rangle$

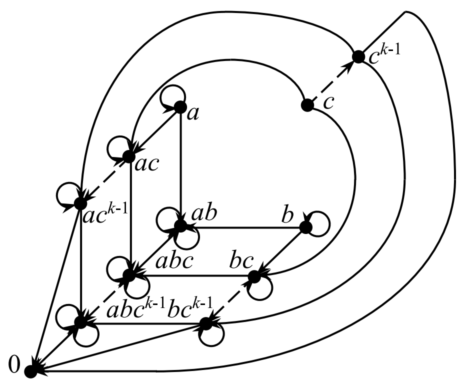

Рис. 11: *Планарный граф Кэли 3-порожденной полугруппы заданной копредставлением* $S = \left\langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^k = 0 \right\rangle$

2) В основе графа Кэли полугруппы $S = \langle a, b \mid ab = ba,\ a^r = 0,\ b^h = 0\rangle$ при $r \leq 2$ или $h \leq 2$, или $r = h = 3$ лежит внешнепланарный граф, либо превращающийся в таковой после удаления вершины 0. В противном случае, когда ($r \geq 3$, $h \geq 4$) или ($r \geq 4$, $h \geq 3$), в основе графа обнаруживается подграф, стягиваемый к графу Q. Пусть, не теряя общности, $r \geq 3$, $h \geq 4$, тогда к графу Q стягивается подграф, восстанавливаемый на следующих множествах вершин: $v_1 = \{a^{r-1}, \ldots, a^2, a, ab, b\}$, $v_2 = \{b^2\}$, $v_3 = \{0\}$, $v_4 = \{b^3, \ldots, b^{h-1}\}$, $v_5 = \{a^{r-1}b^3,\ \ldots, a^2b^3\}$, $v_6 = \{ab^3\}$, $v_7 = \{a^2b, a^2b^2\}$, $v_8 = \{ab^2\}$, в обозначениях Рис. 1 — следовательно, не является вершинно-внешнепланарным графом.

3) Основа графа Кэли полугруппы $S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^h = 0\rangle$ при $r + m = 2$ является внешнепланарным графом для любого $h \geq 1$. При $r + m = 3$ внешнепланарность имеет место для $h \leq 3$, и может быть достигнута удалением любой из вершин множества $\{a^2b^{h-2}, b^{h-2}\}$ для $3 < h \leq 5$; дальнейшее увеличение $h \geq 6$ приводит к появлению подграфа, стягиваемого к $2K_4$, восстанавливаемого на следующих множествах вершин: $v_1 = \{b, ab\}$, $v_2 = \{b^2\}$, $v_3 = \{ab^2\}$, $v_4 = \{a^2b, a^2b^2, a^2b^3, ab^3, b^3\}$, $v_5 = \{b^4, b^5, \ldots, b^{h-1}\}$, $v_6 = \{ab^4\}$, $v_7 = \{ab^5, \ldots, ab^{h-1}\}$, $v_8 = \{a^2b^4, a^2b^5, \ldots, a^2b^{h-1}, 0\}$, в обозначениях Рис. 1 — поэтому не является вершинно-внешнепланарным графом.

Для $r + m = 4$, где $m \leq 2$, основа графа Кэли внешнепланарна при $h = 1$ и обретает внешнепланарность после удаления вершины ab при $2 \leq h \leq 3$; для $h \geq 4$ граф рассматриваемой полугруппы содержит подграф, стягиваемый к графу Oct на множествах вершин: $v_1 = \{b, b^2, b^3, \ldots, b^{h-1}\}$, $v_2 = \{ab^3, \ldots, ab^{h-1}\}$, $v_3 = \{ab^2\}$, $v_4 = \{a^3b, a^3b^2, a^3b^3, \ldots, a^3b^{h-1}, 0\}$, $v_5 = \{a^2b^2, a^2b^3, \ldots, a^2b^{h-1}\}$, $v_6 = \{ab, a^2b\}$, в обозначениях Рис. 1 — поэтому не является вершинно-внешнепланарным графом. Случай $r = 1$, $m \geq 3$ будет охвачен ниже, в допустимой ветви при $r = h = 1$, $m > 2$, а случай $r = 1$, $m = 3$, $h > 1$ невозможен в силу леммы 3.

Для $r \geq 1$, $m \leq 2$, $h \leq 2$ основа рассматриваемого графа внешнепланарна при $h = 1$, либо обращается во внешнепланарный граф после удаления вершины 0, при любых допустимых значениях $h = 2$, $r \geq 1$, $m \leq 2$. Но стоит только выбрать $r+m \geq 5$, $m \leq 2$, $h \geq 3$, как обнаруживается подграф, стягиваемый к графу Oct на шести множествах: $v_1 = \{a^4b, a^4b^2, \ldots,\ a^4b^{h-1}, 0, b^{h-1}\}$, $v_2 = \{a^3b, a^3b^2, \ldots, a^3b^{h-1}\}$, $v_3 = \{a^2b^2, \ldots, a^2b^{h-1}\}$, $v_4 = \{a^2, a^3, a^4\}$, $v_5 = \{a^2b\}$, $v_6 = \{a, ab, \ldots, ab^{h-1}\}$, в обозначениях Рис. 1 — поэтому не является вершинно-внешнепланарным графом.

В оставшемся случае, для $r = h = 1$, если $m \leq 2$, то граф внешнепланарен, а при $m > 2$ внешнепланарность появляется после удаления вершины 0.

4) Основа графа Кэли полугруппы S, заданной своим копредставлением вида $S = \langle a,\ b,\ c \mid ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^2 = a,\ b^2 = b,\ c^k = 0\rangle$ при $k = 1$ является внешнепланарным графом, а при $k = 2$ превращается во внешнепланарный путём удаления вершины ac или bc. Когда $k \geq 3$ основа графа Кэли рассматриваемой полугруппы содержит подграф, стягиваемый к графу $2K_{2,3}$ на следующих множествах вершин: $v_1 = \{ab\}$, $v_2 = \{a\}$, $v_3 = \{b\}$, $v_4 = \{abc\}$, $v_5 = \{ac, c, bc\}$, $v_6 = \{c^2\}$, $v_7 = \{ac^2\}$, $v_8 = \{bc^2\}$, $v_9 = \{0\}$, $v_{10} = \{abc^2\}$, в обозначениях Рис. 1 — поэтому не является вершинно-внешнепланарным графом.

5) Граф Кэли полугруппы $S = \langle a,\ b,\ c \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^2 = b,\ c = 0\rangle$ при $r = m = 1$ в своей основе является внешнепланарным графом. Остальные случаи $r > 1$, $m \leq 2$ приводят к формированию внешнепланарного графа после удаления вершины 0. Следовательно, в каждом из вариантов граф является

вершинно-внешнепланарным.

Что и требовалось доказать. □

Опираясь на замечание 1 к определению 16, из Теоремы 3 выделим те бесконечные полугруппы, которые содержат не более одного превалирующего образующего, что позволяет вывести Следствие 3.

Следствие 3. Бесконечная полугруппа S с нулём 0, являющаяся коммутативно-свободным произведением циклических полугрупп с нулём в классе всех полугрупп с нулём, имеет вершинно-внешнепланарный граф Кэли относительно множества свободных образующих тогда и только тогда, когда S задана копредставлением $S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ b^h = 0 \rangle$, при $h \leq 2$, или задана копредставлением $S = \langle a,\ b,\ c \mid ab = ba,\ b^2 = b,\ c = 0 \rangle$ в классе полугрупп с нулём.

Заключение

В данной работе проведено исследование условий, при которых графы Кэли свободных коммутативных полугрупп являются вершинно-внешнепланарными. Аналогичное исследование было проведено для моноидов и полугрупп с нулём. Полученные результаты углубляют понимание комбинаторной природы этих объектов, подчёркивая их связь с топологическими и алгебраическими свойствами соответствующих полугрупп.

Исследование открывает новые перспективы для дальнейшего изучения связей между комбинаторной теорией графов и теорией полугрупп. В частности, остаются нерешёнными вопросы о классификации других типов полугрупп, графы Кэли которых являются вершинно-внешнепланарными, что оставляет простор для будущих исследований. Особый интерес вызывают прямые произведения циклических полугрупп, моноидов и полугрупп с нулём, допускающие вершинно-внешнепланарные графы Кэли.

Автор искренне благодарен профессору К. Кнауэру за знакомство с вершинно-внешнепланарными графами, редакции Вестника ТвГУ за качественную подготовку материалов статьи к публикации и всем рецензентам за кропотливый труд по внимательной проверке представленных результатов.

Список литературы

[1] Ding G., Dziobiak S. Excluded-Minor Characterization of Apex-Outerplanar Graphs // Graphs and Combinatorics. 2016. Vol. 32, № 2. Pp. 583–627.

[2] Соломатин Д.В. Исследования полугрупп с планарными графами Кэли: результаты и проблемы // Прикладная дискретная математика. 2021. № 54. С. 5–57.

[3] Соломатин Д.В. Конечные свободные коммутативные полугруппы с планарными графами Кэли // Математика и информатика: Наука и образование. 2023. Т. 3. С. 32–38.

Образец цитирования

Соломатин Д.В. Свободные коммутативные полугруппы, допускающие вершинно-внешнепланарные графы Кэли // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 3. С. 25–44. https://doi.org/10.26456/vtpmk740

Сведения об авторах

1. **Соломатин Денис Владимирович**
доцент кафедры математики и методики обучения математике факультета математики, информатики, физики и технологии Омского государственного педагогического университета.

Россия, 644099, г. Омск, наб.Тухачевского, 14, Омский государственный педагогический университет. E-mail: denis_2001j@bk.ru, solomatin_dv@omgpu.ru

FREE COMMUTATIVE SEMIGROUPS WITH APEX-OUTERPLANAR CAYLEY GRAPHS

Solomatin D.V.
Omsk State Pedagogical University, Omsk

Received 28.03.2025, revised 20.08.2025.

This paper is devoted to the study of free commutative semigroups whose Cayley graphs are apex-outerplanar. We establish necessary and sufficient conditions on the number of generators and the defining relations of free commutative semigroups, monoids, and semigroups with zero, under which the corresponding Cayley graph can be embedded in the plane so that, after removing at most one vertex, all remaining vertices lie on the outer face and no edges cross. The main results of this paper are presented as separate theorems, which characterize the apex-outerplanarity of the Cayley graphs of free commutative semigroups, monoids, and semigroups with zero in terms of presentations. The proofs rely on the fact that the class of apex-outerplanar graphs is minor-closed and, therefore, by the Robertson–Seymour theorem, is determined by a finite set of forbidden graphs. This minor-closed class occupies an intermediate position between outerplanar and planar graphs. Ding and Dziobiak identified all 57 forbidden minors of this class and published their results in 2016. The established classification emphasizes the close relationship between the topological properties of the Cayley graph and the algebraic complexity of the semigroup (the number of generators, the number and form of defining relations, the type of the semigroup, and the complexity of algorithms for decision problems over the semigroup). This is essential for constructing graphs in cases where outerplanarity allows more intuitive visualization. The described minimization of edge crossings improves the efficiency of applied research in process graph algebra and its connection to semigroup theory.

Keywords: free commutative semigroup, monoid, semigroup with zero, Cayley graph, apex-outerplanar graph.

Citation

Solomatin D.V., "Free commutative semigroups with apex-outerplanar Cayley graphs", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2025, № 3, 25–44 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk740

References

[1] Ding G., Dziobiak S., "Excluded-Minor Characterization of Apex-Outerplanar Graphs", *Graphs and Combinatorics*, **32**:2 (2016), 583–627.

[2] Solomatin D.V., “Researches of semigroups with planar Cayley graphs: results and problems”, *Prikladnaya diskretnaya matematika [Discrete Applied Mathematics]*, 2021, № 54, 5–57 (in Russian).

[3] Solomatin D.V., “Finite free commutative semigroups with planar Cayley graphs”, *Matematika i informatika: Nauka i obrazovanie [Mathematics and Computer Science: Science and Education]*, **3** (2023), 32–38 (in Russian).

Author Info

1. **Solomatin Denis Vladimirovich**
Associate Professor at the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Omsk State Pedagogical University.

Russia, 644099, Omsk, 14 Tukhachevsky Embankment, Omsk State Pedagogical University. E-mail: denis_2001j@bk.ru, solomatin_dv@omgpu.ru