ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 512.64, 517.926, 517.962.26, 517.982.43, 519.21, 519.72

О СХОДИМОСТИ ДРОБНОЙ ЧАСТИ СВЁРТОК РАЗНОРАСПРЕДЕЛЁННЫХ ПУАССОНОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Елизарова Н.А.*, **Кондратенко А.Е.****, **Кондратенко Н.А.*****, **Соболев В.Н.****, **Чернышова Д.А.****

*МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва

**МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

***Московский физико-технический институт, г. Москва

Поступила в редакцию 16.07.2025, после переработки 20.09.2025.

В работе получен явный вид распределения остатков от деления на произвольное натуральное число свёрток разнораспределённых пуассоновских случайных величин и доказана сходимость по распределению таких остатков к равномерному распределению.

Ключевые слова: свёртка, дробная часть, равномерная случайная величина, пуассоновская случайная величина, энтропия.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 3. С. 45–58.
https://doi.org/10.26456/vtpmk753

Введение

Закон больших чисел и центральная предельная теорема используются в исследованиях предельного поведения свёрток в соответствующих нормировках [10, 12, 13]. Однако интересно рассмотреть поведение свёрток и в несколько другой «нормировке» — дробной части. Подобные постановки задач о свёртке случайных величин известны. Например, в [7] представлен случай гауссовских случайных величин. Ю.В. Прохоровым и его учениками рассматривались [1] задачи, связанные со сходимостью к равномерному распределению. Известно, что равномерное распределение имеет максимум энтропии. Поэтому сходимость к равномерному распределению с ростом числа суммируемых независимых случайных величин можно рассматривать и как стремление некоторой системы к состоянию с максимальной энтропией. Задачи, связанные с изучением максимума энтропии, возникают как в теоретических исследованиях, так и в приложениях (см., например, [2, 8]).

Рассмотрим независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, ...$, распределённые по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$, то есть при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем $\xi_n \sim \Pi(\lambda)$:

$$\mathrm{P}(\xi_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{Z}_+ .$$

В работе [5] (см. также [3, 4, 6]) была доказана сходимость к равномерному распределению остатков от деления на $m = 2, 3, 4$ свёрток одинаково распределённых пуассоновских случайных величин с увеличением числа слагаемых и получен явный вид распределений. Так, при делении на 2:

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_2 = 0\big) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2\lambda n}}{2} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty ,$$

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_2 = 0\big) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2\lambda n}}{2} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty .$$

При делении на 3 при $n \to \infty$

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_3 = 0\big) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2} \to \frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_3 = 1\big) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2} \to \frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_3 = 2\big) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2} \to \frac{1}{3}.$$

При делении на 4:

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_4 = 0\big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda n} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda n} \cdot \cos\lambda n \to \frac{1}{4}, \quad n \to \infty ,$$

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_3 = 1\big) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda n} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda n} \cdot \sin\lambda n \to \frac{1}{4}, \quad n \to \infty ,$$

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_3 = 2\big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda n} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda n} \cdot \cos\lambda n \to \frac{1}{4}, \quad n \to \infty ,$$

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_3 = 3\big) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda n} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda n} \cdot \sin\lambda n \to \frac{1}{4}, \quad n \to \infty .$$

В данной работе эти результаты обобщаются для произвольного натурального m. Оказывается, что в общем случае также можно выписать явную формулу для вычисления вероятностей $\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m = l\big)$ при произвольных $n, m \in \mathbb{N}$ и $l \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. Сразу отметим, что полученные распределения вероятностей определяются через корни из единицы (их ровно m, и все они различны).

Из явного представления вероятностей $\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m = l\big)$ будет следовать сходимость по распределению (далее для краткости просто сходимость случайных величин) свёртки пуассоновских случайных величин по модулю m к равномерному на $l \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ распределению.

Напомним формулу свёртки для двух целочисленных случайных величин ξ и η:

$$\mathrm{P}\left(\xi + \eta = k\right) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}\left(\xi = s\right) \cdot \mathrm{P}\left(\eta = k - s\right) . \qquad (1)$$

1. Случай одинаково распределённых слагаемых

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ суть независимые одинаково распределённые пуассоновские случайные величины с параметром $\lambda > 0$.*

Тогда при произвольных $n, m \in \mathbb{N}$ и $l \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ верны представления

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m = l\big) =& \frac{e^{-\lambda n}}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} u_k^{\{m-l\}_m} e^{u_k \lambda n} \\ =& \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{u_k^{\{m-l\}_m}}{m} e^{-\lambda n (1-u_k)} , \end{aligned}$$

в которых $\{a\}_m$ — остаток от деления целого числа $a \in \mathbb{Z}$ на натуральное $m \in \mathbb{N}$, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, $u_k = e^{\frac{2\pi k}{m} i}$ — k-й корень степени m из единицы.

Доказательство. Известно, что свёртка пуассоновских случайных величин имеет пуассоновское распределение с параметром, равным сумме параметров слагаемых, то есть

$$\xi_1 + \ldots + \xi_n \sim \Pi\left(\lambda n\right) .$$

Также легко видеть, что если $a \geqslant 0$, то при любом $l \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ верно представление

$$\big\{\{a\}_m = l\big\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \big\{a = l + mk\big\} ,$$

в котором внешние скобки являются обозначением множеств, а внутренние обозначением дробной части числа. Поэтому

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m = l\big) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{\xi_1 + \ldots + \xi_n = l + mk\}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n = l + mk\right) = e^{-\lambda n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda n)^{mk+l}}{(mk+l)!} .$$

Определим функцию

$$G\left(x\right) = G_m\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{mk}}{(mk)!} ,$$

у которой при любом $l \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ существуют производные

$$G^{(l)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{mk-l}}{(mk-l)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{mk+m-l}}{(mk+m-l)!}\,.$$

Используя их, все описанные выше вероятности можно представить в виде

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m = l\big) = e^{-\lambda n} \cdot G^{(m-l)}(\lambda n)\,.$$

А так как

$$\sum_{l=0}^{m-1} \mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m = l\big) = G(\lambda n) + \sum_{l=1}^{m-1} e^{-\lambda n} \cdot G^{(m-l)}(\lambda n) = 1,$$

то для $G(x)$ справедливо неоднородное дифференциальное уравнение

$$G(x) + G^{(1)}(x) + \ldots + G^{(m-1)}(x) = e^x$$

с начальными условиями

$$G(0) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^{mk}}{(mk)!} = 1\,, \tag{2}$$

$$G^{(l)}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^{mk-l}}{(mk-l)!} = 0\,, \tag{3}$$

в которых $l \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$.

Найдём решение однородного дифференциального уравнения

$$G(x) + G^{(1)}(x) + \ldots + G^{(m-1)}(x) = 0\,.$$

Его характеристическое уравнение $u^{m-1} + \ldots + u + 1 = 0$ при $u \neq 1$ приводится к виду

$$\frac{u^m - 1}{u - 1} = 0\,, \quad u^m = 1\,.$$

Поскольку $u = 1$ не является решением данного однородного уравнения, то его различные решения представляют собой все оставшиеся корни из единицы:

$$u_k = e^{\frac{2\pi \cdot k}{m} i}\,, \quad k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}\,. \tag{4}$$

Следовательно, общее решение однородного дифференциального уравнения может быть представлено в виде

$$G_{\text{о.о}}(x) = \sum_{k=1}^{m-1} C_k e^{u_k x}\,,$$

в котором C_k — некоторые константы.

Если частное решение неоднородного дифференциального уравнения искать в виде

$$G_{\text{ч.н}}(x) = A \cdot e^x\,,$$

то после подстановки его в начальное неоднородное дифференциальное уравнение и дальнейших элементарных преобразований находим, что

$$G_{\text{ч.н}}(x) = \frac{1}{m} \cdot e^x .$$

Объединение решений приводит к следующему представлению

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{mk}}{(mk)!} = \frac{1}{m} \cdot e^x + \sum_{k=1}^{m-1} C_k e^{u_k x} , \tag{5}$$

в котором, как уже говорилось выше, C_k суть некоторые константы.

Найдём значения констант C_k, которые соответствуют условиям (2) и (3). Для этого подставим начальные условия (2) и (3) в общий вид (5) функции $G(x)$. При такой подстановке получается система из $m-1$ уравнения, которая может быть записана в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ u_1 & \dots & u_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{m-2} & \dots & u_{m-1}^{m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{m} \\ -\frac{1}{m} \\ \dots \\ -\frac{1}{m} \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Видно, что в данной системе матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ u_1 & \dots & u_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{m-2} & \dots & u_{m-1}^{m-2} \end{pmatrix}$$

— это $(m-1, m-1)$-матрица Вандермонда. Как хорошо известно [14], определитель матрицы Вандермонда $V(u_1, \dots, u_{m-1})$ выражается через значения $u_1, \dots, u_{m-1}$ в явном виде:

$$V(u_1, \dots, u_{m-1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m-1} (u_j - u_i) .$$

Последнее выражение показывает, что в нашем случае, в силу (4), данный определитель $V(u_1, \dots, u_{m-1})$ не равен нулю и, следовательно, у матричного уравнения (6) существует единственное решение. В силу единственности решения $(C_1, \dots, C_{m-1})$ нам достаточно его предъявить.

Для этого вначале воспользуемся результатами, полученными в [5, 6] и выписанными в начале работы. Так, при $m = 2$ подстановка функции

$$G(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x + C_1 e^{u_1 x} = \frac{1}{2} \cdot e^x + C_1 e^{\pi i x}$$

в

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_2 = 0\big) = e^{-\lambda n} \cdot G_2^{(0)}(\lambda n) = \frac{1}{2} + C_1 e^{(\pi i - 1)\lambda n} = \frac{1}{2} + C_1 e^{-2\lambda n}$$

должна совпадать с

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1+\ldots+\xi_n\}_2=0\big)=\frac{1}{2}+\frac{e^{-2\lambda n}}{2}.$$

Следовательно, решением будет $C_1=\dfrac{1}{2}$.

Аналогичные рассуждения показывают, что при $m=3$ получится вектор $(C_1,C_2)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$, а при $m=4$ — вектор $(C_1,C_2,C_3)=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

Поэтому предположим, что и в общем случае

$$C_1=C_2=\ldots=C_{m-1}=\frac{1}{m}$$

есть искомое решение.

Для проверки данного предположения выпишем систему (6) в виде системы линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1+C_2+\ldots+C_{m-1}=1-\frac{1}{m},\\ C_1u_1+C_2u_2+\ldots+C_{m-1}u_{m-1}=-\frac{1}{m},\\ C_1u_1^2+C_2u_2^2+\ldots+C_{m-1}u_{m-1}^2=-\frac{1}{m},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1u_1^k+C_2u_2^k+\ldots+C_{m-1}u_{m-1}^k=-\frac{1}{m},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1u_1^{m-2}+C_2u_2^{m-2}+\ldots+C_{m-1}u_{m-1}^{m-2}=-\frac{1}{m}. \end{cases}$$

Так как при $s\in\{1,2,\ldots,m-1\}$ из равенств $u_s=u_1^s$ следуют равенства

$$u_s^k=(u_1^s)^k=\left(u_1^k\right)^s=u_k^s,$$

то последнюю систему можно записать в виде

$$\begin{cases} C_1+C_2+\ldots+C_{m-1}=1-\frac{1}{m},\\ C_1u_1+C_2u_1^2+\ldots+C_{m-1}u_1^{m-1}=-\frac{1}{m},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1u_k+C_2u_k^2+\ldots+C_{m-1}u_k^{m-1}=-\frac{1}{m},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1u_{m-1}+C_2u_{m-1}^2+\ldots+C_{m-1}u_{m-1}^{m-1}=-\frac{1}{m}. \end{cases}$$

После подстановки в последнюю систему значений $C_1=C_2=\ldots=C_{m-1}=\dfrac{1}{m}$ в силу известного для корней из единицы равенства $u_k^0+u_k^1+\ldots+u_k^{m-1}=0$ убеждаемся, что новая система

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m}\cdot(m-1)=1-\dfrac{1}{m},\\ \dfrac{1}{m}\cdot\big(1+u_1+\ldots+u_1^{m-1}-1\big)=-\dfrac{1}{m},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{1}{m}\cdot\big(1+u_k+\ldots+u_k^{m-1}-1\big)=-\dfrac{1}{m},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{1}{m}\cdot\big(1+u_{m-1}+\ldots+u_{m-1}^{m-1}-1\big)=-\dfrac{1}{m} \end{cases}$$

содержит в себе только тождества.

То есть, после подстановки значений $C_1 = C_2 = \ldots = C_{m-1} = \dfrac{1}{m}$ в исходную систему получились верные равенства. Поэтому предположение, что они составляют решение, подтвердилось.

Таким образом,

$$G\left(x\right) = \frac{1}{m} \cdot e^x + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{m} e^{u_k x}\,,$$

$$G\left(\lambda n\right) = \frac{1}{m} \cdot e^{\lambda n} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{m} e^{u_k \lambda n}\,.$$

Поэтому

$$\mathrm{P}\bigl(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m = l\bigr) = e^{-\lambda n} \cdot G^{(\{m-l\}_m)}\left(\lambda n\right) = \frac{e^{-\lambda n}}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u_k^{\{m-l\}_m} e^{u_k \lambda n}$$
$$= \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{u_k^{\{m-l\}_m}}{m} e^{-\lambda n (1-u_k)},$$

где $\{a\}_m$ — остаток от деления целого $a \in \mathbb{Z}$ на натуральное $m \in \mathbb{N}$, $u_k = e^{2\pi \frac{k}{m} i}$ — k-й корень m-ой степени из единицы, $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, $\quad l \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, а i — мнимая единица. На этом доказательство можно считать законченным.

□

Следствие 1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ суть независимые одинаково распределённые пуассоновские случайные величины с параметром $\lambda > 0$. Тогда распределение остатков от деления свёртки данных случайных величин на m, то есть случайных величин $\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m$, стремится к равномерному на множестве $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ распределению. Другими словами, для произвольных $n, m \in \mathbb{N}$ и $l \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ верно, что*

$$\mathrm{P}\bigl(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m = l\bigr) \to \frac{1}{m}, \quad n \to \infty\,. \tag{7}$$

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, при $l \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ верно представление

$$\mathrm{P}\bigl(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m = l\bigr) = \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{u_k^{\{m-l\}_m}}{m} e^{-\lambda n (1-u_k)}\,.$$

При этом понятно, что $\left|u_k^{\{m-l\}_m}\right| = 1$. Поэтому при $n \to \infty$

$$\left|e^{-\lambda n (1-u_k)}\right| = \left|e^{-\lambda n \left(1 - \cos\frac{2\pi \cdot k}{m} - i \sin\frac{2\pi \cdot k}{m}\right)}\right| = 1 \cdot \left|e^{-\lambda n \left(1 - \cos\frac{2\pi \cdot k}{m}\right)}\right| \to 0\,.$$

Таким образом, соотношение (7) доказано.

□

2. Случай разнораспределённых слагаемых

Определим среднее значение параметра для n пуассоновских случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ соответственно, как арифметическое среднее значение значений их параметров:

$$\overline{\lambda}_n = \frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{n}.$$

Тогда аналогичным образом доказываются следующие обобщения полученных выше результатов. При этом очевидна и полная аналогия записи соответствующих утверждений.

Теорема 2. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ суть независимые пуассоновские случайные величины с положительными параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ соответственно.*

Тогда при произвольных $n, m \in \mathbb{N}$ и $l \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ верны представления

$$\mathrm{P}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m = l\big) = \frac{e^{-n\overline{\lambda}_n}}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} u_k^{\{m-l\}_m} e^{u_k n \overline{\lambda}_n} = \\ = \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{u_k^{\{m-l\}_m}}{m} e^{-n\overline{\lambda}_n(1-u_k)},$$

в которых $\{a\}_m$ — остаток от деления целого числа $a \in \mathbb{Z}$ на натуральное $m \in \mathbb{N}$, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $u_k = e^{\frac{2\pi k}{m} i}$ — k-й корень степени m из единицы.

Следствие 2. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ суть независимые пуассоновские случайные величины с положительными параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ соответственно. Тогда при $n, m \in \mathbb{N}$ и $l \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ верно (7), если для всех $n \in \mathbb{N}$ и некоторого $c > 0$ справедливы неравенства $\overline{\lambda}_n \geqslant c$.*

3. Информационный смысл

Как хорошо известно [10], энтропия $\mathrm{H}\xi$ дискретной случайной величины ξ, принимающей m значений $x_1, \ldots, x_m$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_m$ соответственно, определяемая формулой

$$\mathrm{H}\xi = \mathrm{H}(p_1, \ldots, p_m) = -\sum_{k=1}^{m} p_k \log_2 p_k\,,$$

достигает своего максимума $\log_2 m$ на равномерном на $\{x_1, \ldots, x_m\}$ распределении и только на нём, то есть

$$\max_{p_1, \ldots, p_m} \mathrm{H}(p_1, \ldots p_m) = \mathrm{H}\left(\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right) = \log_2 m\,.$$

Данное замечание позволяет переформулировать полученные выше следствия в терминах энтропии дискретной случайной величины. Так, верно следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *суть независимые одинаково распределённые пуассоновские случайные величины с параметром* $\lambda > 0$. *Тогда энтропия распределения остатков от деления свёртки данных случайных величин на* $m \in \mathbb{N}$, *то есть случайных величин* $\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m$, *максимизируется с ростом числа слагаемых:*

$$\mathrm{H}\big(\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m\big) \to \log_2 m, \quad n \to \infty\,. \tag{8}$$

Для случая пуассоновских величин с разными параметрами выполняется аналогичное утверждение.

Следствие 4. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *суть независимые пуассоновские случайные величины с положительными параметрами* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *соответственно и при всех* $n \in \mathbb{N}$ *для некоторого* $c > 0$ *справедливы неравенства* $\overline{\lambda}_n \geqslant c$. *Тогда энтропия распределения остатков от деления свёртки данных случайных величин на* $m \in \mathbb{N}$, *то есть случайных величин* $\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\}_m$, *максимизируется с ростом числа слагаемых в смысле* (8).

Заключение

Таким образом, в случае независимых пуассоновских случайных величин получен явный вид распределения дробной части их свёрток и доказано, что с ростом числа слагаемых дробные части свёрток экспоненциально быстро сходятся по распределению к равномерным случайным величинам и поэтому их энтропии сходятся к своему максимально возможному значению.

Список литературы

[1] Висков О.В., Хохлов В.И. О четырех направлениях исследований Ю.В. Прохорова и их перспективах // Теория вероятностей и ее применения. 2015. Т. 60, № 2. С. 383–390.

[2] Kovačević M. On the maximum entropy of a sum of independent discrete random variables // Теория вероятностей и ее применения. 2021. Т. 66, № 3. С. 601–609.

[3] Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. О максимизации энтропии при свертке с равномерным распределением // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. 2022. Т. 37, № 1. С. 7–11.

[4] Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. Обобщение и унификация понятий остатка от деления и дробной части, максимизация энтропии дробной части свертки с равномерным распределением // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 1. С. 44–52. https://doi.org/10.26456/vtpmk628

[5] Кондратенко А.Е., Соболев В.Н., Чернышова Д.А. О росте энтропии остатков от деления на 2, 3, 4 сверток одинаково распределенных пуассоновских случайных величин // Актуальные проблемы математики и информационных технологий. Материалы IV Всероссийской конференции с международным участием. Махачкала: Изд-во ДГУ, 2023. С. 81–83.

[6] Кондратенко А.Е., Соболев В.Н., Чернышова Д.А. О максимизации энтропии дробной части сверток одинаково распределенных пуассоновских случайных величин в некоторых частных случаях // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. 2023. Т. 38, № 2. С. 32–38.

[7] Куликова А.А., Прохоров Ю.В., Хохлов В.И. Распределение дробных долей случайных векторов: гауссовский случай. II // Теория вероятностей и ее применения. 2005. Т. 50, № 4. С. 776–778.

[8] Матеев П. Об энтропии полиномиального распределения // Теория вероятностей и ее применения. 1978. Т. 23, № 1. С. 196–198.

[9] Прохоров А.В. Равномерное распределение // Вероятность и математическая статистика: энциклопедия. Под ред. Ю.В. Прохорова. М.: БРЭ, 1999. С. 528–529.

[10] Сенатов В.В. Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом «Либроком», 2009. 352 с.

[11] Чечёта С.И. Введение в дискретную теорию информации и кодирования. М.: МЦМНО, 2011. 224 с.

[12] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. 738 с.

[13] Ширяев А.Н. Вероятность. М.: МЦМНО, 2007. 552 с.

[14] Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия. М.: Физматлит, 2009. 512 с.

Образец цитирования

Елизарова Н.А., Кондратенко А.Е., Кондратенко Н.А., Соболев В.Н., Чернышова Д.А. О сходимости дробной части свёрток разнораспределённых пуассоновских случайных величин // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 3. С. 45–58. https://doi.org/10.26456/vtpmk753

Сведения об авторах

1. **Елизарова Наталья Анатольевна**
доцент кафедры высшей математики ИКБ Российского технологического университета МИРЭА.

Россия, 119454, г. Москва, проспект Вернадского, д. 78, МИРЭА — Российский технологический университет. E-mail: elizarova77@mail.ru

2. **Кондратенко Александр Евгеньевич**
доцент кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, д. 1, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: ae_cond@mech.math.msu.su

3. **Кондратенко Николай Александрович**
студент кафедры силовых установок Физтех-школы авиационных и цифровых технологий Московского физико-технического института.

Россия, 140180, Московская область, г. Жуковский, ул. Гагарина, д. 16, ПИШ ФАЛТ МФТИ. E-mail: kondratenko.na@phystech.edu

4. **Соболев Виталий Николаевич**
доцент кафедры математических и компьютерных методов анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, д. 1, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: sobolev_vn@mail.ru

5. **Чернышова Дарья Андреевна**
студент кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, д. 1, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: daria.chernyshova@math.msu.ru

ON THE CONVERGENCE OF THE FRACTIONAL PART OF CONVOLUTIONS OF POISSON DISTRIBUTED RANDOM VARIABLES WITH UNEQUAL PARAMETERS

Elizarova N.A.*, **Condratenko A.E.****, **Kondratenko N.A.*****, **Sobolev V.N.****, **Chernyshova D.A.****
*MIREA — Russian Technological University, Moscow
**Lomonosov Moscow State University, Moscow
***Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow

Received 16.07.2025, revised 20.09.2025.

The article provides an explicit formula for the distribution of remainders modulo an arbitrary natural number of the convolutions of unequly distributed Poisson random variables and shows their convergence in law to the uniform distribution.

Keywords: convolution, fractional part, uniform distributions, Poisson distribution, entropy.

Citation

Elizarova N.A., Condratenko A.E., Kondratenko N.A., Sobolev V.N., Chernyshova D.A., “On the convergence of the fractional part of convolutions of Poisson distributed random variables with unequal parameters”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2025, № 3, 45–58 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk753

References

[1] Viskov O.V., Khokhlov V.I., “Four Areas of Yu. V. Prokhorov’s Studies and Their Perspectives”, *Theory of Probability and its Applications*, **60**:2 (2016), 336–342.

[2] Kovačević M., “On the Maximum Entropy of a Sum of Independent Discrete Random Variables”, *Theory of Probability and its Applications*, **66**:3 (2021), 482–487.

[3] Condratenko A.E., Sobolev V.N., “On maximizing entropy in convolution with uniform distribution”, *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Estestvennye nauki [Bulletin of Dagestan State University. Series 1: Natural Sciences]*, **37**:1 (2022), 7–11 (in Russian).

[4] Condratenko A.E., Sobolev V.N., “Generalization and unification of the concepts of remainder of division and fractional part, maximization of entropy of fractional part of convolution with uniform distribution”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 1, 44–52 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk628.

[5] Condratenko A.E., Sobolev V.N., Chernyshova D.A., "On the growth of the entropy of the residuals from dividing into 2, 3, 4 convolutions of identically distributed Poisson random variables", *Aktualnye problemy matematiki i informatsionnykh tekhnologij. Materialy IV Vserossijskoj konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem [Current problems of mathematics and information technology. Proceedings of the IV All-Russian Conference with international participation]*, Publishing house of DSU, Makhachkala, 2023, 81–83 (in Russian).

[6] Condratenko A.E., Sobolev V.N., Chernyshova D.A., "On maximizing the entropy of the fractional part of convolutions of identically distributed Poisson random variables in some special cases", *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Estestvennye nauki [Bulletin of Dagestan State University Series 1. Natural sciences]*, **38**:2 (2023), 32–38 (in Russian).

[7] Kulikova A.A., Prokhorov Yu.V., Khokhlov V.I., "Distribution of fractional parts of random vectors: Gaussian case. II", *Theory of Probability and its Applications*, **50**:4 (2006), 685–687.

[8] Mateev P., "On the entropy of a multinomial distribution", *Theory of Probability and its Applications*, **23**:1 (1978), 188–190.

[9] Prokhorov A.V., "Uniform distribution", *Veroyatnost i matematicheskaya statistika: entsiklopediya [Probability and Mathematical statistics: an encyclopedia]*, ed. Yu.V. Prokhorova, The Great Russian Encyclopedia, Moscow, 1999, 528–529 (in Russian).

[10] Senatov V.V., *Tsentralnaya predelnaya teorema: Tochnost approksimatsii i asimptoticheskie razlozheniya [The central limit theorem: Accuracy of approximation and asymptotic expansions]*, Librocom Book House, Moscow, 2009 (in Russian), 352 pp.

[11] Chechyota S.I., *Vvedenie v diskretnuyu teoriyu informatsii i kodirovaniya [Introduction to the discrete theory of information and coding]*, MTsMNO, Moscow, 2011 (in Russian), 224 pp.

[12] Feller W., *Vvedenie v teoriyu veroyatnostej i ee prilozheniya [Introduction to probability theory and its applications]*, Mir Publ., Moscow, 1984 (in Russian), 738 pp.

[13] Shiryaev A.N., *Veroyatnost [Probability]*, MCMNO, Moscow, 2007 (in Russian), 552 pp.

[14] Shafarevich I.R., Remizov A.O., *Linejnaya algebra i geometriya [Linear algebra and geometry]*, Fizmatlit, Moscow, 2009 (in Russian), 512 pp.

Author Info

1. **Elizarova Natalya Anatol'evna**
Docent at the Department of Higher Mathematics, MIREA — Russian Technological University.

Russia, 119454, Moscow, Vernadsky Avenue, 78, MIREA — Russian Technological University. E-mail: elizarova77@mail.ru

2. **Condratenko Alexandr Evgenyevich**
Associate Professor at the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Russia, 119992, Moscow, GSP-1, 1 Leninskiye Gory, Lomonosov Moscow State University. E-mail: ae_cond@mech.math.msu.su

3. **Kondratenko Nikolay Alexandrovich**
Student at Faculty of Aeromechanics and Flight Engineering, Moscow Institute of Physics and Technology.

Russia, 140180, Moscow Region, 16 Gagarin street, Moscow Institute of Physics and Technology. E-mail: kondratenko.na@phystech.edu

4. **Sobolev Vitaliy Nickolayevich**
Docent at Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Russia, 119992, Moscow, GSP-1, 1 Leninskiye Gory, Lomonosov Moscow State University. E-mail: sobolev_vn@mail.ru

5. **Chernyshova Daria Andreevna**
Student at Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Russia, 119992, Moscow, GSP-1, 1 Leninskiye Gory, Lomonosov Moscow State University. E-mail: daria.chernyshova@math.msu.ru