

Развитие критического мышления школьников при изучении квадратных уравнений на основе метода параметризации

И.В. Кузнецова¹, А.П. Сильченко², М.А. Суворова¹

¹ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им.
К.Д. Ушинского», г. Ярославль

²ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», г. Тверь

В статье рассмотрены вопросы развития критического мышления у школьников при обучении математике. На примере темы «Квадратные уравнения» показана возможность превратить процесс обучения математики из шаблонного выполнения действий в плоскость исследовательской деятельности: школьники учатся прогнозировать результаты, оценивать устойчивость решений к изменениям параметров и формулировать выводы на основе множества сценариев. Цель исследования – описание приема развития критического мышления у обучающихся на основе метода параметризации. Обосновано, что практико-ориентированные задачи моделируют реальную действительность и демонстрируют связь математики с повседневной жизнью. Показано применение программы GeoGebra к исследованию уравнений с параметром.

Ключевые слова: критическое мышление, метод параметризации, подготовка школьников, квадратные уравнения, GeoGebra.

В условиях стремительно меняющегося мира современная образовательная система сталкивается с необходимостью подготовки учащихся, способных не только усваивать знания, но и применять их на практике, критически оценивать информацию и находить нестандартные решения. Особую актуальность приобретает формирование критического мышления – ключевой компетенции, позволяющей анализировать данные, выявлять закономерности и принимать взвешенные решения, что востребовано как в научной деятельности, так и в повседневной жизни. Математика, с её акцентом на анализ, сравнение и логические выводы, становится важнейшей дисциплиной для развития этих навыков, особенно в основной школе, где закладывается фундамент интеллектуальной самостоятельности.

Понятие критического мышления трактуется в научной литературе неоднозначно. В рамках исследования мы опираемся на определение Г.М. Коджаспировой и А.Ю. Коджаспирова, которые рассматривают его как «способность анализировать информацию с

позиций логики, умение выносить обоснованные суждения, решения и применять полученные результаты как к стандартным, так и нестандартным ситуациям, вопросам и проблемам» [2, с. 65].

Особенно активно следует развивать критическое мышление в основной школе, в частности, на уроках математики.

Эффективное развитие критического мышления при изучении математики в школе требует реализации комплекса педагогических условий. Согласно исследованиям С.Ю. Галиевой и А.Б. Каметовой, к ним относятся:

1. *Организационно-педагогические условия* – создание среды для продуктивной познавательной деятельности, интеграция критического мышления во внеурочную работу, использование практико-ориентированных задач.

2. *Психолого-педагогические условия* – формирование субъектной позиции обучающихся через интерактивные форматы обучения, поддержка творческих идей, стимулирование саморазвития и самореализации в учебном процессе.

3. *Социально-педагогические условия* – построение диалоговых отношений между участниками образовательного процесса, ориентированных на взаимное развитие и коллаборацию [1].

Эти условия взаимосвязаны, например, интерактивные методы не только развивают аналитические навыки, но и укрепляют коммуникативную культуру, а включение реальных практико-ориентированных задач в учебный процесс демонстрирует связь математики с реальной действительностью.

Ключевое место в школьном курсе математики занимает тема «Квадратные уравнения».

Квадратные уравнения, изучение которых традиционно сводится к техническому освоению алгоритмов их решения, обладают значительным дидактическим потенциалом в развитии критического мышления у школьников. Они служат не только основой для изучения высшей математики, но и идеальной моделью для анализа взаимосвязей между коэффициентами и свойствами уравнений, прогнозирования результатов через интерпретацию дискриминанта, применения математических знаний в реальных контекстах (физика, экономика, биология и др.). Глубокое понимание квадратных уравнений, включая методы решения и интерпретацию результатов, создаёт базу для усвоения более сложных математических концепций, что прямо влияет на развитие критического мышления у школьников.

Для реализации цели развития критического мышления у школьников предлагается метод параметризации, который трансформирует стандартное изучение квадратных уравнений в проектную деятельность обучающихся [3].

Под параметризацией математического объекта или процесса Е.И. Смирнов, А.Д. Уваров и С.А. Тихомиров понимают «способ определения независимых параметров, их описание, связи и диапазон допустимых значений для выявления существенных связей и компонентов» [4, с. 21].

Таким образом, параметризация предполагает выделение независимых параметров, описание их взаимосвязей и диапазонов значений, что способствует выявлению структурных особенностей математического объекта. В контексте изучения темы «Квадратные уравнения» это означает введение параметра (например, коэффициента a в уравнении $ax^2+bx+c=0$) и анализ того, как его вариации влияют на корни, дискриминант и графическую интерпретацию. Такой подход переводит решение уравнений из шаблонного выполнения действий в плоскость исследовательской деятельности: обучающиеся учатся прогнозировать результаты, оценивать устойчивость решений к изменениям параметров и формулировать выводы на основе множества сценариев. Внедрение параметризации во внеклассные занятия по математике позволяет создать условия для развития критического мышления. Например, задания могут включать:

- исследование уравнений вида $ax^2+bx+c=0$ при различных значениях a и b , где ученики анализируют зависимость количества корней от параметров;

- построение графиков квадратичных функций с динамически изменяемыми коэффициентами с использованием цифровых инструментов (например, GeoGebra), что визуализирует связь между параметрами и свойствами параболы;

- решение задач с неочевидными условиями, например, нахождение значений параметра, при которых уравнение имеет корни, удовлетворяющие определённым критериям (положительность, кратность, принадлежность интервалу).

Так как задания с параметром могут вызвать некоторый страх у обучающихся, то на первых внеклассных занятиях по математике следует обучить школьников решать уравнения с параметрами, в которых на переменную накладываются какие-либо искусственные ограничения. Например, задача, где требуется найти, при каком значении параметра квадратное уравнение имеет один корень, два корня или не имеет корней. Такая задача не должна вызвать трудности, если учащийся понимает, от чего зависит количество решений квадратного уравнения, тогда ему остаётся только внимательно выполнить задание, найдя дискриминант и исследуя его. При этом наиболее целесообразно заинтересовать школьников к решению таких задач, а также предлагать им практико-ориентированные задачи. Приведем пример. Можно учащимся предложить такую задачу:

Задача. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $ax^2+3x+2=0$:

1) не имеет решений; 2) имеет одно решение; 3) имеет два решения.

Также можно данную задачу преобразовать в следующую практико-ориентированную задачу.

Практико-ориентированная задача.

Контекст:

Врачи используют математические модели для определения оптимальной дозы препарата, которая обеспечит нужный терапевтический эффект без вреда для пациента. Представим, что концентрация лекарства в крови через t часов после приёма описывается уравнением: $C(t) = at^2+2t+1$ (мг/л), где a – коэффициент, зависящий от скорости выведения препарата из организма (у каждого пациента он индивидуален).

Условие задачи:

Для эффективного лечения инфекции концентрация лекарства должна быть *не ниже 2 мг/л* в течение как минимум 1 часа.

1. При каком значении параметра a лекарство *вообще не подействует* (концентрация никогда не достигнет 2 мг/л)?

2. При каком a препарат будет эффективен *ровно 1 час*?

3. При каких значениях a лекарство обеспечит *длительный эффект* (концентрация превысит 2 мг/л более чем на 1 час)?

Решение:

Определим ограничения. Переменная t (время) не имеет смысла при значениях, меньших нуля (ноль – момент введения лекарства), и $C(t)$ не может быть отрицательной.

1. Лекарство не подействует, если уравнение $at^2+2t+1=2$ не имеет решений. Преобразуем его: $at^2+2t+1=0$.

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4a = 4 - 4a$.

Условие отсутствия решений: $D < 0 \rightarrow 4 - 4a < 0 \rightarrow a > 1$.

При $a=1$ концентрация достигнет 2 мг/л только в один момент времени.

2. Эффект от лекарства длится ровно 1 час, если уравнение имеет два корня ($D > 0$) и $t_2 - t_1 = 1$.

$$\begin{cases} D > 0 \\ t_2 - t_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 4a > 0 \\ \frac{-2 + \sqrt{4 - 4a}}{2a} - \frac{-2 - \sqrt{4 - 4a}}{2a} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a < 1 \\ \frac{\sqrt{1 - a} - 1 + 1 + \sqrt{1 - a}}{a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 1 \\ \frac{2\sqrt{1 - a}}{a} = 1 \end{cases}$$

$$a \neq 0$$

$$2\sqrt{1+a} = a \Rightarrow 4 + 4a = a^2$$

$$a_1 = -0.82842712475$$

$$a_2 = 4.82842712475$$

Положительный корень не имеет смысла в рамках данной модели, так как в этом случае получаем отрицательное значение времени t_1 . При $a \approx -0,828$ эффект от лекарства длится ровно 1 час.

3. *Длительный эффект* возможен, если уравнение имеет два корня ($D > 0$) и $t_2 - t_1 > 1$.

4. При $-0,829 < a < 0$ эффект от лекарства длится более 1 часа, причем при приближении значения a к 0 временной промежуток стремится к бесконечности.

5. *Интерпретация результатов:*

– Если $a < -1$ (например, у пациента с быстрым метаболизмом), лекарство не успевает накопиться в нужной концентрации.

– При $a = -1$ концентрация препарата на мгновение достигнет необходимой концентрации.

– При $-1 < a < 0$ (например, у пациента с медленным метаболизмом) лекарство сохраняет эффективность дольше и поможет достичь необходимого эффекта.

Дополнительные вопросы для обсуждения с учащимися:

– Почему коэффициент a связан с индивидуальными особенностями пациента?

– Как изменяется график $C(t)$ при разных a ? Проанализируйте это в GeoGebra.

– Что произойдёт, если $a = 0$? Будет ли это безопасно для пациента?

– Что произойдёт, если a станет положительным?

Итог обсуждения дополнительных вопросов со школьниками может быть следующим:

1. Коэффициент a в уравнении $C(t) = at^2 + 2t + 1$ определяет скорость выведения лекарства из организма, которая зависит:

– от метаболизма: у пациентов с быстрым обменом веществ ($a < -1$) лекарство выводится быстрее, поэтому концентрация не успевает достичь терапевтического уровня;

– от состояния органов: при нарушении работы почек или печени ($a \rightarrow 0$) препарат выводится медленнее, что может привести к накоплению и риску передозировки;

– возраста и веса: дети или пожилые люди часто имеют иной метаболизм, что требует корректировки a .

Таким образом, a – это математическая абстракция, которая помогает учесть биологические различия между людьми.

– 2. Решим данную задачу в GeoGebra. На модели синий фон – область определения для модели. Изменяя значение параметра a при помощи ползунка, можно наблюдать и оценивать результаты решения задачи. Параметр g – время, когда концентрация превышает критическую ($y = 2$)

$$a = -0.829$$

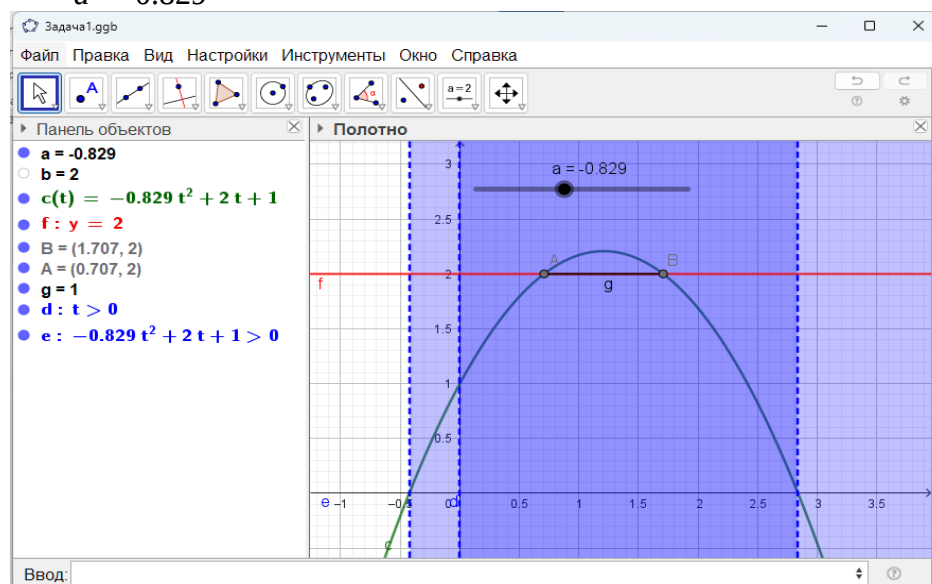


Рис. 1. Эффект от лекарства длится ровно 1 час

$$a \rightarrow 0$$

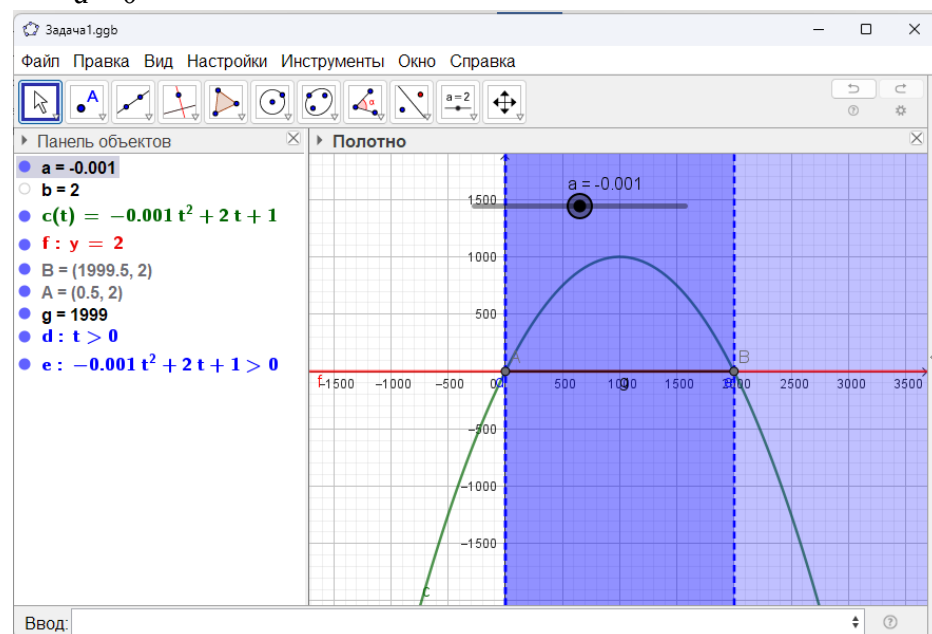


Рис. 2. Лекарство сохраняет эффективность длительное время

$a=0$

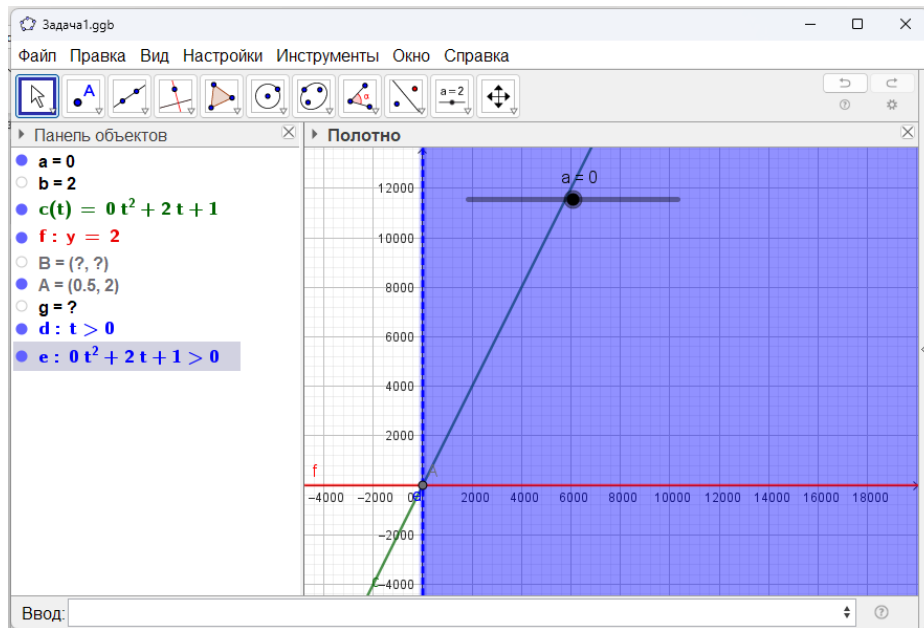


Рис. 3. Лекарство не выводится из организма

$a>0$

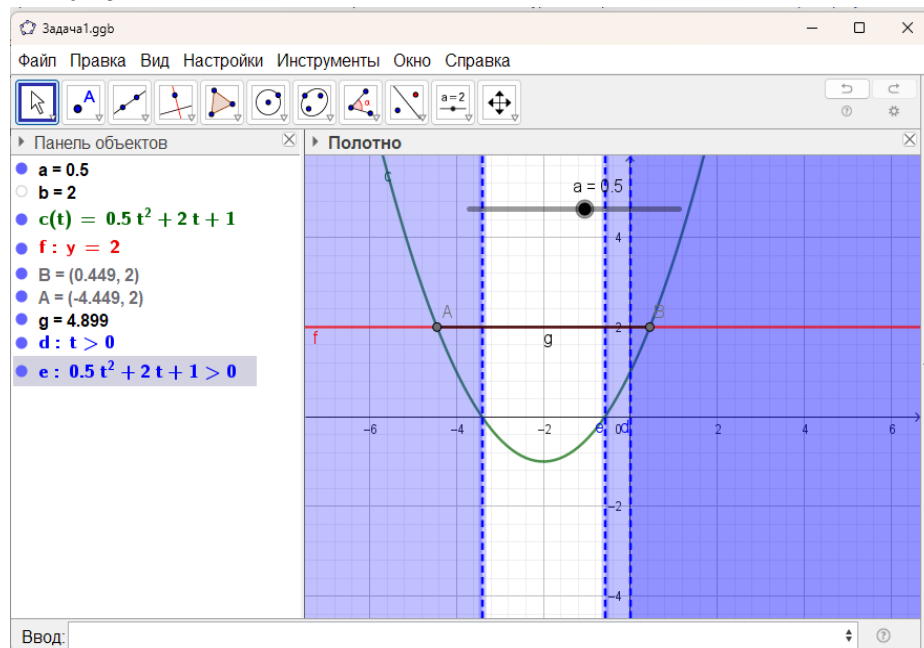


Рис. 4. Скорость накопления лекарства растет по квадратичному закону

3. Что произойдёт, если $a=0$? Будет ли это безопасно?

Если $a=0$, уравнение превращается в линейное: $C(t)=2t+1$

– Концентрация будет бесконечно расти со временем ($C(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$).

– Это крайне опасно: пациент получит передозировку, что может привести к анафилактическому шоку. Если a станет положительным, то ветви параболы будут направлены вверх, концентрация будет расти быстрее, чем при линейной зависимости.

Вывод: $a \geq 0$ физически невозможен в реальной жизни, так как ни одно лекарство не может накапливаться в организме бесконечно.

4. Критический анализ модели (для продвинутого обсуждения с учащимися старших классов).

– Ограничения модели: реальная концентрация лекарства обычно описывается экспоненциальными функциями, а не квадратными. Квадратичная модель здесь упрощена для учебных целей.

– Почему выбрана парабола? Чтобы показать, как параметр влияет на количество решений уравнения – это помогает визуализировать связь математики с практикой.

– Как улучшить модель? Добавить ограничение по времени (например, рассматривать только первые 6 часов после приёма).

Таким образом, представленная практико-ориентированная задача не только учит решать уравнения с параметрами, но и показывает, как математика моделирует реальные процессы. Однако важно обсуждать с учениками не только решение таких задач, но и рассматривать границы применимости таких моделей, что будет развивать их критическое мышление. Кроме того, условие задачи показывает, как математика помогает врачам персонализировать лечение и избегать ошибок в дозировке, что особенно актуально в эпоху индивидуальной медицины.

К основным методам решения уравнений с параметром относятся аналитический метод и функционально-графический метод. Функционально-графический метод решения задач с параметрами, как и метод выбора из графического представления множества решений, состоит в отображении множества точек на координатной плоскости. При решении задачи с параметрами функционально-графическим методом чтение ответа происходит с графика. При этом у выполняющего задание могут возникнуть сложности или возможно допущение ошибки. В таком случае необходимо прибегнуть к аналитическому методу решения задач с параметрами для того, чтобы избежать трудностей и проверить правильность считанных с графика данных.

Функционально-графический метод можно использовать, когда необходимо найти количество решений квадратного уравнения в зависимости от значения параметра или найти значения параметра, при которых нет решений уравнений, или оно единственно. Например, учащимся можно предложить выполнить следующее задание двумя способами: аналитическим и функционально-графическим. Для решения вторым способом использовать программу GeoGebra. Это позволит

визуализировать процесс решения, что в свою очередь, способствует более успешному усвоению учебного материала.

Задание. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - (a - 2)x + a - 3 = 0$ имеет единственный корень.

Для решения задания функционально-графическим методом строим динамический чертеж в GeoGebra. Для этого вводим в строке ввода функцию: $x^2 - (a - 2)x + a - 3 = 0$. С помощью появившегося ползунка изменяем значение параметра и видим, как начинает смещаться парабола. В задании необходимо найти все значения параметра a , при каждом из которых данное уравнение имеет единственный корень, т.е. найти все значения параметра a , при которых парабола касается оси Ox , имеет одну точку пересечения с осью Ox .

Ответ: $a=4$.

Подобные задания стимулируют учащихся к выдвижению гипотез, проверке их валидности через анализ исключительных случаев (например, нулевой дискриминант) и рефлексии над полученными результатами. Это формирует не только предметные компетенции, но и метапредметные навыки: умение работать с неопределённостью, аргументировать свою позицию и корректировать стратегию решения в зависимости от контекста.

Таким образом, использование метода параметризации при решении квадратных уравнений с параметром на уроках математики позволяет подготовить учащихся к вызовам современности, где гибкость ума и способность к рефлексии становятся основой для успешной адаптации и непрерывного самообразования.

Список литературы

1. Галиева С.Ю., Каметова А.Б. Педагогические условия как фактор формирования критического мышления школьников в контексте изучения математики // Научно-педагогическое обозрение. 2021. № 4(38). С. 43–53.
2. Коджаспирова Г.М., Коджаспиров А.Ю. Педагогический словарь. М.: Академия, 2003. 176 с.
3. Введение в проектную деятельность. Синергетический подход: Учебное пособие / И.В. Кузнецова, С.В. Напалков, Е.И. Смирнов, С.А. Тихомиров. Саратов: Вузовское образование, 2020. 166 с.
4. Смирнов Е.И., Уваров А.Д., Тихомиров С.А. Проявление синергии исследования многоэтапных математико-информационных заданий на основе метода параметризации // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2024. № 1(33). С. 18–33. DOI 10.24888/2500-1957-2024-1-18-33.

Об авторах:

КУЗНЕЦОВА Ирина Викторовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии и алгебры ФГБОУ ВО «Ярославский

государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского» (150000, г. Ярославль, ул. Республиканская, 108/1), e-mail: gits70@mail.ru

СИЛЬЧЕНКО Ален Павлович – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического и естественнонаучного образования, ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет» (170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33), e-mail: Silchenko.AP@tversu.ru

СУВОРОВА Мария Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии и алгебры ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского» (150000, г. Ярославль, ул. Республиканская, 108/1), e-mail: homesuv@gmail.com

Development of critical thinking of school students in the study of quadratic equations based on the parameterization method

I.V. Kuznetsova¹, A.P. Silchenko², M.A. Suvorova¹

¹Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky, Yaroslavl

²Tver State University, Tver

The article discusses the development of critical thinking in school students when teaching mathematics. Using the example of the topic «Quadratic equations», the possibility is shown to transform the learning process of mathematics from a template of performing actions into a research activity: students learn to predict results, assess the resilience of solutions to changes in parameters, and formulate conclusions based on a variety of scenarios. The purpose of the study is to describe a technique for developing critical thinking in school students based on the parameterization method. It is proved that practice-oriented tasks simulate reality and demonstrate the connection of mathematics with everyday life. The application of the GeoGebra program to the study of equations with a parameter is shown.

Keywords: *critical thinking, parameterization method, preparing school students, quadratic equations, GeoGebra.*

Принято в редакцию: 28.05.2025 г.

Подписано в печать: 12.08.2025 г.