УДК 519.2

О ПРИМЕНЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕЛАПОРТА В ЗАДАЧАХ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ[1]

Бенинг В.Е.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 10.08.2025, после переработки 06.09.2025.

В работе рассмотрено применение распределения Делапорта к анализу асимптотического поведения мощностей критериев в случае выборок случайного объема в задаче проверки простой гипотезы, касающейся одномерного параметра, против последовательности близких альтернатив. Это распределение описывает случайный объем выборок. Вводится понятие мощности критерия для этого случая. Проведено асимптотическое сравнение конкретных критериев (в случае нормальных выборок) с помощью понятия дефект, который представляет собой добавочное число наблюдений, необходимое конкурирующему критерию для асимптотического достижения мощности наилучшего критерия.

Ключевые слова: распределение Делапорта, мощность критерия, уровень значимости, выборка случайного объема, случайный индекс, асимптотический дефект, эффективность, асимптотическое разложение, усеченное биномиальное распределение, усеченное распределение Пуассона.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 4. С. 5–24.
https://doi.org/10.26456/vtpmk756

1. Введение

Распределение Делапорта введено в работах [1,2] для адекватного описания задач автомобильного страхования. Случайная величина N имеет распределение Делапорта с параметрами $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \lambda \geq 0$, если

$$\mathsf{P}(N = k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\Gamma(\alpha+i)\ \beta^i\ \lambda^{k-i}\ e^{-\lambda}}{\Gamma(\alpha)\ i!\ (1+\beta)^{\alpha+i}\ (k-i)!}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Это распределение обобщает, например, отрицательное биномиальное распределение ($\lambda = 0$) и распределение Пуассона ($\lambda = \beta = 0$) и в силу своей известной гибкости находит широкое применение при моделировании реальных процессов. Производящая функция моментов этого распределения имеет вид

$$\mathsf{E}e^{tN} = \frac{e^{\lambda(e^t-1)}}{(1 - \beta(e^t - 1))^{\alpha}},$$

а математическое ожидание и дисперсия

$$\mathsf{E}N = \lambda + \alpha\beta,$$

$$\mathsf{D}N = \lambda + \alpha\beta(1 + \beta).$$

Ниже будет рассмотрено усеченное в нуле распределение Делапорта, зависящее от натурального параметра $n = 1, 2, \ldots$, то есть случайная величина N_n, имеющая распределение

$$\mathsf{P}(N_n = k) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda} \cdot (1+\beta)^{-\alpha}} \sum_{i=0}^{k} \frac{\Gamma(\alpha+i)\beta^i \lambda^{k-i} e^{-\lambda}}{\Gamma(\alpha) i! (1+\beta)^{\alpha+i}(k-i)!}, k = 1, 2, \ldots \quad (1)$$

При этом параметры α, β, λ выбираются так, чтобы

$$\mathsf{E}N_n = n + \gamma + o(1), \quad \mathsf{D}N_n = o(n). \quad (2)$$

При этих условиях нетрудно видеть, что

$$\mathsf{E}N_n^{-1} = \frac{1}{n} - \frac{\gamma}{n^2} + o(n^{-2}), \quad \mathsf{E}N_n^{-2} = \frac{1}{n^2} + o(n^{-2}), \quad \mathsf{E}N_n^{-3} = O(n^{-3}). \quad (3)$$

Асимптотическому (то есть при стремлении объема выборки к бесконечности) исследованию поведения свойств статистических оценок и мощностей критериев посвящено много работ (см., например, [3–16]). При этом критерии, имеющие одинаковую предельную мощность (то есть асимптотически оптимальные критерии), встречаются весьма часто и возникает естественный вопрос об их асимптотическом сравнении. С этой целью обычно применяется понятие асимптотический дефект (см. [15]), который имеет смысл добавочного числа наблюдений для конкурирующего критерия, необходимого для достижения того же качества, что и оптимальный. Однако часто возникает ситуация, когда объем выборки не детерминирован, а случаен. При этом вопросы асимптотического сравнения качества критериев в этом случае в значительной мере не ясны и остаются открытыми. В работе делается попытка сравнения качества критериев в случае выборок случайного объема в простейшем случае.

Рассмотрим задачу проверки простой статистической гипотезы, касающейся одномерного параметра, против последовательности близких альтернатив и предположим, что размер выборки случаен, но в некотором смысле (например, по вероятности) стремится к бесконечности. Качество критериев при этом оценивается по предельному поведению их мощностей.

В работе продолжаются исследования, начатые в работах [3–13], получены асимптотические разложения (а.р.) для функций мощностей конкретных критериев, основанных на выборках случайного объема. Асимптотическое сравнение качества критериев проводится с помощью понятия дефект, определение которого дано в п. 2. Приведены три примера, иллюстрирующие полученные результаты, в которых рассматриваются усеченные биномиальное распределение, распределение Пуассона и распределение Делапорта, описывающие случайный объем выборок.

В статье приняты следующие обозначения: $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\Phi(x)$ и $\phi(x)$ — соответственно, функция распределения и плотность стандартного нормального закона.

В п. 2 приведены результаты в случае неслучайного объема выборки, в п. 3 рассматриваются выборки случайного объема, п. 4 посвящен усеченным распределениям Пуассона, биномиальному распределению и распределению Делапорта, п. 5 содержит заключение.

2. Асимптотический дефект и его свойства

Рассмотрим две последовательности критериев (критических функций) $\{\Psi_n^*\}$ и $\{\Psi_n\}$, $n = 1, 2\ldots$ для проверки одной и то же статистической гипотезы с фиксированным уровнем значимости $\alpha \in (0,1)$. Обозначим через $\beta_n^*(\theta_n)$ и $\beta_n(\theta_n)$ соответственно мощности этих критериев против последовательности альтернатив θ_n, $n = 1, 2\ \ldots$. Здесь n — число наблюдений $X_1, \ldots, X_n$, на которых основаны эти критерии. При этом предполагается, что критерий Ψ_n^* является «оптимальным» (равномерно наиболее мощным), а критерий Ψ_n — конкурирующим. Обозначим через $m(n)$ необходимое число наблюдений, которое требуется критерию $\Psi_{m(n)}$, основанному на наблюдениях $X_1, \ldots, X_{m(n)}$, для достижения такого же качества, что и «лучший» критерий Ψ_n^*, которому требуется n наблюдений $X_1, \ldots, X_n$. То есть $m(n)$ удовлетворяет уравнению

$$\beta_n^*(\theta_n) \ = \ \beta_{m(n)}(\theta_n).$$

Здесь переменная $m(n)$ рассматривается как непрерывная величина, а мощность β_n для действительных n определяется с помощью линейной интерполяции между соседними целыми числами. Ниже рассматривается асимптотический подход, означающий, что $n \to \infty$. Под асимптотической относительной эффективностью (АОЭ) критерия $\Psi_{m(n)}$ по отношению к критерию Ψ_n^* понимается предел (в случае его существования и независимости от последовательности $m(n)$) вида (см., например, [14])

$$e \ \equiv \ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{m(n)}.$$

Смысл этого предела состоит в том, при больших значениях числа наблюдений n величина $m(n)$ приближенно равна $e^{-1} \cdot n$, поэтому критерию $\Psi_{m(n)}$ для достижения такого же качества, что и критерию Ψ_n^*, требуется примерно в «e^{-1} раз» больше наблюдений.

Естественно, что вместо отношения можно было бы рассматривать разность вида $m(n) - n$, которая тоже имеет наглядный смысл необходимого дополнительного числа наблюдений, требующихся критерию $\Psi_{m(n)}$ для достижения того же качества, что и критерию Ψ_n^*. Однако, исторически сложилось так, что сначала исследовались асимптотические свойства отношения $\frac{n}{m(n)}$ (по-видимому, в силу относительной простоты его поведения).

Впервые асимптотическое исследование поведения разности $m(n) - n$ было предпринято Дж. Ходжесом и Э. Леманом (см. [15]) в 1970 году. Они назвали разность $m(n) - n$ дефектом (deficiency), в нашем случае, критерия $\Psi_{m(n)}$ относительно критерия Ψ_n^* и предложили обозначение

$$d_n = m(n) - n.$$

Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$ существует, то он называется *асимптотическим дефектом* критерия $\Psi_{m(n)}$ относительно критерия Ψ_n^* и обозначается символом d. Часто d называют просто дефектом $\Psi_{m(n)}$ относительно Ψ_n^*. Заметим, что если АОЭ $e \neq 1$, то $d = \infty$ и этот случай малоинтересен. В работе [15] также было отмечено, что существуют статистические задачи, в которых типичным образом возникает случай $e = 1$ (см., например, [14,16]), то есть в этом случае понятие АОЭ не дает ответа на вопрос, какой критерий «лучше», и понятие дефекта проясняет эту ситуацию, поскольку в этом случае асимптотический дефект может, в принципе, быть любым.

Пусть, например, дефект d конечен, тогда при больших значений n величина $m(n)$ равна приближенно $n + d$. И чтобы получить ту же величину мощности критерию $\Psi_{m(n)}$ требуется примерно на d наблюдений больше, чем критерию Ψ_n^*.

Таким образом дефект критерия Ψ_n относительно критерия Ψ_n^* показывает, сколько добавочных наблюдений примерно требуется, если мы настаиваем на использовании критерия $\Psi_{m(n)}$ вместо критерия Ψ_n^*, и поэтому создает естественный базис для их асимптотического сравнения в случае $e = 1$. Исследование асимптотического поведения дефекта d_n технически более сложно, чем нахождение предела e. Часто оно требует построения асимптотических разложений (а.р.) для соответствующих функций мощности, характеризующих качество критериев (см., например, [14,16]).

Типичным образом функции мощности $\beta_n^*(\theta_n)$ и $\beta_n(\theta_n)$ не известны точно и используются их аппроксимации (асимптотические разложения).

Следующая Лемма может быть полезна при нахождении асимптотического дефекта и доказывается непосредственным применением формулы Тейлора. Её доказательство фактически содержится в выводе формул (1.5.37) — (1.5.39) в книге [16].

Лемма 1. *Пусть при альтернативах вида*

$$\theta_n = \frac{t}{\sqrt{n}}, \quad |t| \le C, \quad C > 0$$

для функций мощности равномерно по t *справедливы асимптотические разложения*

$$\beta_n^*(\theta_n) = \beta^*(t) + \frac{\beta_1^*(t)}{\sqrt{n}} + \frac{\beta_2^*(t)}{n} + r_n^*,$$

$$\beta_n(\theta_n) = \beta^*(t) + \frac{\beta_1^*(t)}{\sqrt{n}} + \frac{\beta_2(t)}{n} + r_n,$$

где для остаточных членов r_n^* *и* r_n *справедливы неравенства*

$$|r_n^*| \le \frac{C_1}{n^{1+\gamma_1}}, \quad |r_n| \le \frac{C_2}{n^{1+\gamma_2}}, \quad C_i > 0,\ \gamma_i > 0, \quad i = 1,\ 2$$

и функции $\beta^*(\cdot)$, $\beta_1^*(\cdot)$, $\beta_2^*(\cdot)$, $\beta_2(\cdot)$ *достаточно гладкие. Тогда для дефекта*

$$d_n = m(n) - n, \quad \beta_n^*(\theta_n) = \beta_{m(n)}(\theta_n)$$

справедливо равенство

$$d = \lim_{n\to\infty} d_n = \frac{2\big(\beta_2^*(t) - \beta_2(t)\big)}{t\cdot\beta^{*'}(t)}, \quad t \neq 0, \quad \beta^{*'}(t) \neq 0.$$

Подчеркнем, что в условиях этой Леммы существенно, что альтернативы имеют порядок $n^{-1/2}$ и первые два члена в асимптотических разложениях мощностей этих критериев совпадают.

Приведем примеры применения этой Леммы.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые нормально распределенные наблюдения с неизвестным математическим ожиданием $\theta \in \mathbb{R}$ и известной дисперсией $\sigma^2 > 0$. Рассмотрим проверку простой гипотезы

$$\mathbf{H_0}: \ \theta = 0, \tag{4}$$

(здесь вместо нуля можно было бы взять любую фиксированную точку $\theta_0 \in \mathbb{R}$, поскольку в этом случае можно рассмотреть новое семейство плотностей вида $\frac{1}{\sigma}\cdot\phi\big(\sigma^{-1}(x - \theta_0 - \theta)\big)$ и рассматривать θ в окрестности нуля) против последовательности локальных сложных альтернатив

$$\mathbf{H_{1n}}: \theta = \theta_n = \frac{t}{\sqrt{n}}, \quad 0 < t \leq C, \quad C > 0. \tag{5}$$

При заданном уровне значимости $\alpha \in (0,1)$ и каждом фиксированном $t \in (0, C]$, по Лемме Неймана-Пирсона наилучший критерий имеет критическую область вида

$$\frac{\sqrt{n}\ \bar{X}_n}{\sigma} > u_\alpha, \tag{6}$$

где

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \quad \Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$$

и мощность вида

$$\beta_k^*(\theta_n) = \Phi(\sqrt{k/n}\cdot t - u_\alpha), \quad \beta_n^*(\theta_n) = \Phi(t - u_\alpha), \quad k,\ n \in \mathbb{N}.$$

Для этой задачи в работе [15] рассмотрен также критерий Стьюдента с критической областью вида

$$\frac{\sqrt{n}\ \bar{X}_n}{S_n} > C_n, \tag{7}$$

где

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

и мощностью вида (см. [15], формула (5.6))

$$\beta_k(\theta_n) = \Phi\big(t\sqrt{k/n}\cdot(1 - u_\alpha^2/(4k)) - u_\alpha\big) + O(k^{-2}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из этой формулы непосредственно следует асимптотическое разложение

$$\beta_n(\theta_n) = \Phi(t - u_\alpha) - \frac{tu_\alpha^2}{4n} \cdot \phi(t - u_\alpha) + O(n^{-2}), \quad n \to \infty.$$

Теперь из Леммы 1 следует соотношение (см. также [15], формула (5.7))

$$d = \lim_{n\to\infty} d_n = \frac{2\big(\beta_2^*(t) - \beta_2(t)\big)}{t \cdot \beta^{*\prime}(t)} = \frac{u_\alpha^2}{2}.$$

Пусть теперь $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные наблюдения с плотностью $p(x, \theta)$, которая известна с точностью до параметра θ. При фиксированном уровне значимости рассмотрим задачу проверки простой гипотезы (4) против последовательности локальных альтернатив (5). По лемме Неймана-Пирсона оптимальный критерий основан на логарифме отношения правдоподобия

$$\Lambda_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \big(\log p(X_i, t/\sqrt{n}) - \log\, p(X_i, 0)\big),$$

имеет критическую область вида (мы предполагаем непрерывность соответствующих распределений)

$$\Lambda_n(t) \geq C_{n,t}$$

и мощность $\beta_n^*(t)$. Рассмотрим также для этой задачи (то есть при альтернативе $\theta_n = t/\sqrt{n}$, $t > 0$) критерий, основанный на статистике вида $\Lambda_n(s)$, $s > 0$ и обозначим его мощность, зависящую от альтернативы $t/\sqrt{n}$, через $\beta_{n,s}^*(t)$. В книге [16, стр. 10] при соответствующих условиях регулярности получена формула

$$\beta_n^*(t) - \beta_{n,s}^*(t) = \frac{D_{t,s}}{2nt\sqrt{I}} \cdot \phi(t\sqrt{I} - u_\alpha) + o(n^{-1}) = \frac{\beta_2^*(t) - \beta_2(t)}{n} + o(n^{-1}),$$

$$D_{t,s} = \frac{1}{4} \cdot (t(t - s))^2 \cdot \Big(\mathsf{D}_0 l^{(2)}(X_1, 0) - \frac{1}{I} \cdot \mathbf{Cov}_0\big(l^{(1)}(X_1, 0),\ l^{(2)}(X_1, 0)\big)\Big),$$

$$l^{(i)}(x, \theta) = \frac{\partial^i}{\partial \theta^i} \log\, p(x, \theta)\ \ i = 1,\, 2; \quad I = \mathsf{E}_0\big(l^{(1)}(X_1, 0)\big)^2, \quad \beta^*(t) = \Phi(t\sqrt{I} - u_\alpha).$$

Теперь из Леммы 1 непосредственно следует формула для асимптотического дефекта

$$d = \lim_{n\to\infty} d_n = \frac{2\big(\beta_2^*(t) - \beta_2(t)\big)}{t \cdot \beta^{*\prime}(t)} =$$

$$= \frac{(t - s)^2 \cdot \Big(\mathsf{D}_0 l^{(2)}(X_1, 0) - \frac{1}{I} \cdot \mathbf{Cov}_0\big(l^{(1)}(X_1, 0),\ l^{(2)}(X_1, 0)\big)\Big)}{4I} \geq 0.$$

Аналогично, если рассмотреть критерий, основанный на статистике

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} l^{(1)}(X_i, 0),$$

и имеющий мощность $\beta_n(t)$, то из формулы (1.4.10) книги [16] и Леммы 1 следует, что его асимптотический дефект относительно наилучшего критерия с мощностью $\beta_n^*(t)$ имеет вид

$$d \;=\; \lim_{n\to\infty} \; d_n \;=\; \frac{t^2 \cdot \Big(\mathsf{D}_0 l^{(2)}(X_1, 0) \;-\; \frac{1}{I} \cdot \mathbf{Cov}_0\big(l^{(1)}(X_1, 0),\; l^{(2)}(X_1, 0)\big)\Big)}{4I} \;\geq\; 0.$$

3. Выборки случайного объема

Рассмотрим случайные величины $N_1,\; N_2,\; \ldots$ и $X_1,\; X_2,\; \ldots$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega,\; \mathcal{A},\; \mathsf{P})$. В рассматриваемом случае случайные величины (с.в.) $X_1,\; \ldots\; X_n$ интерпретируются как наблюдения, а n как неслучайное число наблюдений, при этом случайная величина N_n — случайное число наблюдений, зависящее от натурального параметра $n \in \mathbb{N}$. Например, если с.в. N_n имеет геометрическое распределение вида

$$\mathsf{P}(N_n \;=\; k) \;=\; \frac{1}{n}\left(1 \;-\; \frac{1}{n}\right)^{k-1},\; k \in \mathbb{N},$$

то

$$\mathsf{E}\; N_n \;=\; n, \tag{8}$$

и, значит, среднее число наблюдений равно n. Условие (8) далее будет предполагаться выполненным в ослабленном варианте $\mathsf{E}\; N_n \;=\; n \;+\; o(n),\;\; n \;\to\; \infty.$

Предположим, что для каждого $n \;\in\; \mathbb{N}$ с.в. N_n принимает только натуральные значения (то есть $N_n \;\in \mathbb{N}$) и не зависит от последовательности с.в. $X_1,\; X_2,\; \ldots$.

Для каждого $n \;\in\; \mathbb{N}$ обозначим через $\Psi_n^* \;=\; \Psi_n^*(X_1, \ldots, X_n)$ критическую функцию, определяющую данный статистический критерий, то есть это действительная измеримая функция, зависящая от наблюдений $X_1,\; \ldots,\; X_n$ и принимающая значения на отрезке $[0,\; 1]$. Для каждого n определим критерий, зависящий от случайного числа наблюдений N_n, то есть критическую функцию вида

$$\Psi_{N_n}^*(\omega) \;\equiv\; \Psi_{N_n(\omega)}^*(X_1(\omega), \ldots, X_{N_n(\omega)}(\omega)),\;\; \omega \;\in\; \Omega,$$

и мощность этого критерия относительно последовательности альтернатив θ_n

$$\tilde{\beta}_n^*(\theta_n) \;=\; \mathsf{E}_{n,\theta_n} \Psi_{N_n}^*(X_1, \ldots, X_{N_n}) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \; \beta_k^*(\theta_n) \cdot \mathsf{P}(N_n \;=\; k),$$

где $\beta_k^*(\theta_n)$ — мощность критерия, основанного на неслучайном числе наблюдений k

$$\beta_k^*(\theta_n) \;=\; \mathsf{E}_{n,\theta_n} \Psi_k^*(X_1, \ldots, X_k).$$

Рассмотрим сначала асимптотическое поведение так называемой усредненной мощности этого критерия, которая имеет смысл некоторой средней (усредненной) характеристики критерия и зависит от всей последовательности альтернатив и распределения случайного индекса, как при байесовском подходе, и определяется по формуле

$$\bar{\beta}_{(n)}^* \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \; \beta_k^*(\theta_k) \cdot \mathsf{P}(N_n \;=\; k).$$

Введенная здесь усредненная мощность $\bar{\beta}^*_{(n)}$ также имеет смысл, поскольку для неё существует конечный дефект, и поэтому она является одной из возможных аппроксимаций мощности критериев, построенных по выборкам случайного объема.

С помощью формулы полной вероятности нетрудно получить следующее утверждение

Лемма 2. *Пусть мощность $\beta^*_n(\theta_n)$ удовлетворяет условиям Леммы 1, тогда для усредненной мощности $\bar{\beta}^*_{(n)}(\theta_n)$ справедливо асимптотическое разложение*

$$\bar{\beta}^*_{(n)} \;=\; \beta^*(t) \;+\; \beta^*_1(t)\cdot \mathsf{E}\, N_n^{-1/2} \;+\; \beta^*_2(t)\cdot \mathsf{E}\, N_n^{-1} \;+\; \bar{r}^*_n,$$

где для остаточного члена $\bar{r}^*_n$ справедливо неравенство

$$|\bar{r}^*_n| \;\le\; C_1\cdot \mathsf{E} N_n^{-1-\gamma_1}, \quad \gamma_1 \;>\; 0, \quad C_1 \;>\; 0.$$

Если для случайного индекса N_n справедливы соотношения

$$\mathsf{E} N_n^{-1/2} \;=\; \frac{a_1}{\sqrt{n}} \;+\; \frac{a_2}{n} \;+\; o(n^{-1}),$$

$$\mathsf{E}\, N_n^{-1} \;=\; \frac{b_2}{n} \;+\; o(n^{-1}), \quad a_1,\ a_2,\ b_2 \;\in\; \mathbb{R},$$
$$\mathsf{E}\, N_n^{-1-\gamma} \;=\; o(n^{-1}),$$

то для усредненной мощности $\bar{\beta}^*_{(n)}$ справедливо асимптотическое разложение

$$\bar{\beta}^*_{(n)} = \beta^*(t) + \;\beta^*_1(t)\cdot \frac{a_1}{\sqrt{n}} \;+\; \frac{1}{n}\big(b_2\cdot \beta^*_2(t) \;+\; a_2\cdot \beta^*_1(t)\big) \;+\; o(n^{-1}).$$

В случае, если $a_1 \;=\; 1$, асимптотический дефект $\bar{d}$, определяемый по формуле

$$\bar{d}_n \;=\; \bar{m}(n) \;-\; n, \quad \beta^*_n(\theta_n) \;=\; \bar{\beta}^*_{(\bar{m}(n))}$$

(при решении последнего уравнения переменная $\bar{m}(n)$, как и всюду выше, трактуется как непрерывная переменная), равен

$$\bar{d} \;=\; \frac{2\Big((1 \;-\; b_2)\beta^*_2(t) \;-\; a_2\beta^*_1(t)\Big)}{t\beta^{*\prime}(t)}.$$

Рассмотрим теперь (как и выше) критерий, основанный на выборках случайного объема и имеющий следующую мощность относительно последовательности альтернатив θ_n

$$\tilde{\beta}^*_n(\theta_n) \;=\; \mathsf{E}_{n,\theta_n}\Psi^*_{N_n}(X_1,\ldots,X_{N_n}) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \beta^*_k(\theta_n)\cdot \mathsf{P}(N_n \;=\; k).$$

Определим формально последовательность натуральных чисел $m(n)$ из уравнения

$$\beta^*_n(\theta_n) \;=\; \tilde{\beta}^*_{m(n)}(\theta_n),$$

$$d_n = m(n) - n,$$

где величина d_n это «среднее добавочное число наблюдений» в случае случайного числа наблюдений, при котором мощность при фиксированной альтернативе совпадает с мощностью в случае неслучайного числа наблюдений. В приводимом ниже Утверждении приводятся достаточные условия, при которых существует конечный предел

$$d = \lim_{n\to\infty} d_n.$$

Теорема 1. *Пусть мощность $\beta_n^*(\theta_n)$ удовлетворяет условиям Леммы 1 и для мощности $\beta_k^*(\theta_n)$ справедливо асимптотическое разложение вида*

$$\beta_k^*(\theta_n) = \beta(t) + a(n,t) + \frac{b(n,t)}{\sqrt{k}} + \frac{c(n,t)}{k} + \\ + \big(k/n - 1\big)\cdot\beta_1(t) + \big(k/n - 1\big)^2\cdot\beta_2(t) + r_{n,k},$$

где остаточный член $r_{n,k}$ удовлетворяет неравенству

$$|r_{n,k}| \le C\cdot\big(|k/n - 1|^{2+\gamma} + k^{-1-\gamma}\big), \quad C > 0, \quad \gamma > 0$$

и $a(n,t)$, $b(n,t)$, $c(n,t)$ — некоторые константы. Тогда для мощности $\tilde\beta_n^*(\theta_n)$ справедливо асимптотическое разложение

$$\tilde\beta_n^*(\theta_n) = \beta(t) + \mathsf{E}\,\big(N_n/n - 1\big)\cdot\beta_1(t) + \mathsf{E}\,\big(N_n/n - 1\big)^2\cdot\beta_2(t) + \\ + a(n,t) + b(n,t)\cdot\mathsf{E}\,N_n^{-1/2} + c(n,t)\cdot\mathsf{E}\,N_n^{-1} + \rho_n,$$

где остаточный член ρ_n удовлетворяет неравенству

$$|\rho_n| \le C\cdot\big(\mathsf{E}\,|N_n/n - 1|^{2+\gamma} + \mathsf{E}\,N_n^{-1-\gamma}\big), \quad C > 0, \quad \gamma > 0.$$

Доказательство. Непосредственно следует из Леммы 1 и формулы полной вероятности. □

Следствие 1. *Пусть выполнены условия Теоремы 1, и если для моментов случайного индекса N_n справедливы соотношения (здесь для $\mathsf{E}N_n$ предполагается более слабое условие по сравнению с (8))*

$$\mathsf{E}N_n = n + o(n^{-1}), \quad \mathsf{D}N_n = v\cdot n + o(n), \quad \mathsf{E}\,|N_n/n - 1|^{2+\gamma} = o(n^{-1-\gamma}),$$

$$\mathsf{E}N_n^{-1/2} = \frac{a_1}{\sqrt{n}} + \frac{a_2}{n} + o(n^{-1}),$$

$$\mathsf{E}\,N_n^{-1} = \frac{b_2}{n} + o(n^{-1}), \quad a_1,\ a_2,\ b_2 \in \mathbb{R},$$

$$\mathsf{E}\,N_n^{-1-\gamma} = o(n^{-1}),$$

тогда для мощности $\tilde\beta_n^*(\theta_n)$ справедливо асимптотическое разложение

$$\tilde\beta_n^*(\theta_n) = \beta(t) + a(n,t) + \frac{b(n,t)a_1}{\sqrt{n}} + \\ + \frac{a_2 b(n,t) + b_2 c(n,t) + v\beta_2(t)}{n} + o(n^{-1})$$

и в случае, если $\beta(t) = \beta^*(t)$, $a(n,t) = 0$, $a_1 b(n,t) = \beta_1^*(t) + o(n^{-1/2})$ *и*

$$c(n,t) = c(t) + o(1),$$

для указанного выше асимптотического дефекта справедливо равенство

$$d = \lim_{n\to\infty} d_n = \frac{2\big(\beta_2^*(t) - v\cdot\beta_2(t) - a_2\beta_1^*(t)/a_1 - b_2 c(t)\big)}{t\cdot\beta^{*\prime}(t)}, t\neq 0, \beta^{*'}(t)\neq 0.$$

Рассмотрим в качестве примера применения этих результатов с критическими областями (6) и (7). Выше для их мощностей были приведены формулы

$$\beta_k^*(\theta_n) = \Phi(\sqrt{k/n}\cdot t - u_\alpha),$$

$$\beta_k(\theta_n) = \Phi\big(t\sqrt{k/n}\cdot(1 - u_\alpha^2/(4k)) - u_\alpha\big) + O(k^{-2}), \quad k,\ n \in \mathbb{N}.$$

Определим их мощности в случае выборок случайного объема по формулам

$$\tilde{\beta}_n^*(\theta_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^*(\theta_n)\cdot \mathsf{P}(N_n = k) = \mathsf{E}\,\Phi\big(\sqrt{N_n/n}\cdot t - u_\alpha\big),$$

$$\tilde{\beta}_n(\theta_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\theta_n)\cdot \mathsf{P}(N_n = k) =$$
$$= \mathsf{E}\,\Phi\big(\sqrt{N_n/n}\cdot t(1 - u_\alpha^2\cdot N_n^{-1}\cdot 1/4) - u_\alpha\big) + O(\mathsf{E}\,N_n^{-2}).$$

Рассмотрим функцию

$$g(x) = \Phi(u_1\sqrt{x+1} + u_2), \quad u_1,\ u_2 \in \mathbb{R},$$

тогда по формуле Тейлора с интегральным остаточным членом ее можно представить в виде

$$g(x) = g(0) + x\cdot g^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2}\cdot g^{(2)}(0) + \frac{x^3}{2}\cdot\int_0^1 (1 - \nu)^2 g^{(3)}(x\nu)d\nu.$$

Из этой формулы следуют асимптотические разложения

$$\tilde{\beta}_n^*(\theta_n) = \mathsf{E}\,\Phi\big(\sqrt{N_n/n}\cdot t - u_\alpha\big) =$$
$$= \Phi(t - u_\alpha) - \frac{t\cdot \mathsf{D}N_n}{8n^2}\cdot\phi(t - u_\alpha)(1 - tu_\alpha + t^2) + O\big(\mathsf{E}\,|N_n/n - 1|^3\big),$$

$$\tilde{\beta}_n(\theta_n) = \mathsf{E}\,\Phi\big(\sqrt{N_n/n}\cdot t(1 - u_\alpha^2\cdot N_n^{-1}\cdot 1/4) - u_\alpha\big) + O(\mathsf{E}\,N_n^{-2}) =$$
$$= \Phi(t - u_\alpha) - \frac{t\cdot \mathsf{D}N_n}{8n^2}\cdot\phi(t - u_\alpha)(1 - tu_\alpha + t^2) -$$
$$- \frac{u_\alpha^2}{4\sqrt{n}}\cdot \mathsf{E}N_n^{-1/2}\cdot\phi(t - u_\alpha) + O(n^{-1}\cdot \mathsf{E}\,N_n^{-1}) + O(\mathsf{E}\,N_n^{-2}) + O\big(\mathsf{E}\,|N_n/n - 1|^3\big).$$

Теперь из этих формул непосредственно следует следующая Теорема

Теорема 2. *Пусть для случайного индекса N_n справедливы соотношения*

$$\mathsf{E}N_n = n + o(n^{-1}), \quad \mathsf{D}N_n = v\cdot n + o(n), \quad \mathsf{E}\,|N_n/n - 1|^3 = o(n^{-1}),$$

$$\mathsf{E}N_n^{-1/2} = \frac{a_1}{\sqrt{n}} + \frac{a_2}{n} + o(n^{-1}),$$

$$\mathsf{E}\ N_n^{-1} = \frac{b_2}{n} + o(n^{-1}), \quad a_1,\ a_2,\ b_2 \in \mathbb{R},$$

$$\mathsf{E}\ N_n^{-2} = o(n^{-1}),$$

тогда для мощностей $\tilde{\beta}_n^*(\theta_n)$ и $\tilde{\beta}_n(\theta_n)$ указанных выше критериев справедливы асимптотические разложения

$$\tilde{\beta}_n^*(\theta_n) = \Phi(t - u_\alpha) - \frac{t\cdot v}{8n}\cdot\phi(t - u_\alpha)(1 - tu_\alpha + t^2) + o\big(n^{-1}\big),$$

$$\tilde{\beta}_n(\theta_n) = \Phi(t-u_\alpha) - \frac{t\cdot v}{8n}\cdot\phi(t-u_\alpha)(1-tu_\alpha+t^2) - \frac{t\cdot u_\alpha^2}{4\ n}\cdot a_1\cdot\phi(t-u_\alpha) + o(n^{-1}).$$

Эти критерии имеют, соответственно, асимптотические дефекты $\bar{d}^*$ и $\bar{d}$ относительно наилучшего критерия с мощностью

$$\beta_n^*(\theta_n) = \Phi(t - u_\alpha),$$

вида

$$\bar{d}^* = \frac{v\cdot(1 - tu_\alpha + t^2)}{4}, \quad \bar{d} = \frac{v\cdot(1 - tu_\alpha + t^2) + 2u_\alpha^2 a_1}{4}$$

и дефект между собой, равный

$$\tilde{d}^* = \frac{a_1\cdot u_\alpha^2}{2}.$$

Замечание 1. *Заметим, что если рассмотреть усредненные мощности, то указанные в Теореме 2 критерии имеют, соответственно, усредненные мощности вида*

$$\Phi(t - u_\alpha)$$

и

$$\mathsf{E}\ \Phi\big(t(1 - u_\alpha^2\cdot N_n^{-1}\cdot 1/4) - u_\alpha\big) + O(\mathsf{E}\ N_n^{-2}) =$$
$$= \Phi(t - u_\alpha) - \frac{t\cdot u_\alpha^2\cdot\mathsf{E}\ N_n^{-1}}{4}\cdot\phi(t - u_\alpha) + O(\mathsf{E}\ N_n^{-2}).$$

При этом в условиях Теоремы 2 их дефект равен

$$\frac{b_2\cdot u_\alpha^2}{2}.$$

4. Случай усеченных биномиального распределения, распределения Пуассона и распределения Делапорта

Пусть с.в. N имеет усеченное в нуле биномиальное распределение с параметрами n и $p \in (0,1)$, то есть

$$\mathsf{P}\big(N = i\big) = \frac{1}{1 - q^n} \binom{n}{i} p^i\, q^{n-i}, \quad q = 1 - p, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Тогда

$$\mathsf{E}\, N = \frac{np}{1 - q^n}$$

и в работе [17, см. формулы (2.18)—(2.20)] получены следующие асимптотические формулы

$$\mathsf{E}\, N^{-1} = \frac{1}{1 - q^n} \left(\frac{1}{np} + \frac{q}{(np)^2} + O\big((np)^{-3}\big)\right),$$

$$\mathsf{E}\, N^{-2} = \frac{1}{1 - q^n} \left(\frac{1}{(np)^2} + O\big((np)^{-3}\big)\right),$$

$$\mathsf{E}\, N^{-3} = \frac{1}{1 - q^n} \left(\frac{1}{(np)^3} + O\big((np)^{-4}\big)\right).$$

Определим теперь случайный индекс N_n как с.в. N с параметрами $n, m \in \mathbb{N}$, m фиксировано и $p = 1/m$, $n \to \infty$. Тогда из последних формул получаем

$$\mathsf{E}\, N_n^{-1} = \frac{1}{1 - (1-1/m)^{nm}} \left(\frac{1}{n} + \frac{1-1/m}{n^2} + O\big(n^{-3}\big)\right) = $$
$$= \frac{1}{n} + \frac{1-1/m}{n^2} + O\big(n^{-3}\big).$$

В работе [17] доказана более общая формула (см. Следствие 3)

$$\mathsf{E}\, N_n^{-s} = \frac{1}{n^s}\left(1 + \frac{s(s+1)(1-1/m)}{2n} + O\big(n^{-2}\big)\right), \quad s > 0.$$

Теорема 3. *Пусть случайный индекс N_n имеет распределение (9) с параметрами n, $m \in \mathbb{N}$, m фиксировано и $p = 1/m$, $n \to \infty$. Тогда в условиях Теоремы 2 справедливы асимптотические разложения*

$$\tilde{\beta}_n^*(\theta_n) = \Phi(t - u_\alpha) - \frac{t(1-1/m)}{8n} \cdot \phi(t-u_\alpha)(1 - tu_\alpha + t^2) + o\big(n^{-1}\big),$$

$$\tilde{\beta}_n(\theta_n) = \Phi(t - u_\alpha) - \frac{t\cdot(1-1/m)}{8n} \cdot \phi(t-u_\alpha)(1 - tu_\alpha + t^2) - \frac{t\cdot u_\alpha^2}{4n}\cdot\phi(t-u_\alpha) + o(n^{-1}).$$

Эти критерии имеют, соответственно, асимптотические дефекты $\bar{d}_1^*$ и $\bar{d}_1$ относительно наилучшего критерия с мощностью

$$\beta_n^*(\theta_n) = \Phi(t - u_\alpha),$$

вида

$$\bar{d}_1^* \;=\; \frac{(1\;-\;1/m)(1\;-\;tu_\alpha\;+\;t^2)}{4}, \quad \bar{d}_1 \;=\; \frac{(1\;-\;1/m)\cdot(1\;-\;tu_\alpha\;+\;t^2)\;+\;2u_\alpha^2}{4}$$

и дефект между собой, равный

$$\tilde{d}_{11}^* \;=\; \frac{u_\alpha^2}{2}.$$

Замечание 2. *Заметим, что если рассмотреть усредненные мощности, то указанные в Теореме 3 критерии имеют, соответственно, усредненные мощности вида*

$$\Phi(t\;-\;u_\alpha)$$

и

$$\Phi(t\;-\;u_\alpha)\;-\;\frac{t\cdot u_\alpha^2}{4n}\cdot\phi(t\;-\;u_\alpha)\;+\;o(n^{-1}).$$

При этом с учетом Теоремы 2 их дефект равен $u_\alpha^2/2$.

Доказательство. Непосредственно следует из утверждения Теоремы 2, приведенных выше формул для моментов вида $\mathsf{E}\,N_n^{-s},\ s\;>\;0$ и неравенства, справедливого для биномиальных случайных величин N_n:

$$\mathsf{E}\,|N_n/n\;-\;1|^3\;\le\;\Big(\mathsf{E}\,(N_n/n\;-\;1)^4\Big)^{3/4}\;=\;o(n^{-1}).$$

□

Пусть теперь случайная величина M имеет усеченное в нуле распределение Пуассона с параметром $\lambda\;>\;0$, то есть

$$\mathsf{P}\big(M\;=\;i\big)\;=\;\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^i}{i!\,(1\;-\;e^{-\lambda})},\quad i\;=\;1,2,\ldots, \tag{10}$$

тогда

$$\mathsf{E}\,M\;=\;\frac{\lambda}{1\;-\;e^{-\lambda}}.$$

В работе [15, см. (3.7)] также получены следующие асимптотические формулы:

$$\mathsf{E}M^{-g}=\frac{1}{\lambda^g(1-e^{-\lambda})}\Big(1+\frac{g(g+1)}{2\lambda}+\frac{g(10+21g+14g^2+3g^3)}{24\lambda^2}+O\big(\lambda^{-3}\big)\Big), g>0.$$

Определим теперь случайный индекс N_n как случайную величину $M\;=\;M_n$ с параметром $\lambda=n\in\mathbb{N},\ n\;\to\;\infty$. Тогда из последней формулы следует, что

$$\mathsf{E}\,N_n^{-g}\;=\;\frac{1}{n^g}\,\Big(1\;+\;\frac{g(g+1)}{2n}\;+\;\frac{g(10+21g+14g^2+3g^3)}{24n^2}\;+\;O\big(n^{-3}\big)\Big),\quad g\;>\;0.$$

Теорема 4. *Пусть случайный индекс N_n имеет распределение (10) с параметром $\lambda = n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \to \infty$. Тогда в условиях Теоремы 2 справедливы асимптотические разложения*

$$\tilde{\beta}^*_n(\theta_n) = \Phi(t - u_\alpha) - \frac{t}{8n} \cdot \phi(t - u_\alpha)(1 - tu_\alpha + t^2) + o\big(n^{-1}\big),$$

$$\tilde{\beta}_n(\theta_n) = \Phi(t - u_\alpha) - \frac{t}{8n} \cdot \phi(t - u_\alpha)(1 - tu_\alpha + t^2) - \frac{t \cdot u_\alpha^2}{4\ n} \cdot \phi(t - u_\alpha) + o(n^{-1}).$$

Эти критерии имеют, соответственно, асимптотические дефекты $\bar{d}^*_2$ и $\bar{d}_2$ относительно наилучшего критерия с мощностью

$$\beta^*_n(\theta_n) = \Phi(t - u_\alpha),$$

вида

$$\bar{d}^*_2 = \frac{1 - tu_\alpha + t^2}{4}, \quad \bar{d}_2 = \frac{1 - tu_\alpha + t^2 + 2u_\alpha^2}{4}$$

и дефект между собой равный

$$\tilde{d}^*_{22} = \frac{u_\alpha^2}{2}.$$

При доказательстве этой Теоремы используются Теорема 2, указанные выше формулы и неравенство, справедливое для пуассоновских случайных величин N_n

$$\mathsf{E}\ |N_n/n - 1|^3 \leq \Big(\mathsf{E}\ (N_n/n - 1)^4\Big)^{3/4} = o(n^{-1}).$$

Замечание 3. Заметим, что если рассмотреть усредненные мощности, то указанные в Теореме 4 критерии имеют, соответственно, усредненные мощности вида

$$\Phi(t - u_\alpha)$$

и

$$\Phi(t - u_\alpha) - \frac{t \cdot u_\alpha^2}{4n} \cdot \phi(t - u_\alpha) + o(n^{-1}).$$

При этом из Теоремы 2 следует, что их дефект равен $u_\alpha^2/2$.

Теорема 5. *Пусть случайный индекс N_n имеет распределение Делапорта (1) и выполнены условия (2) и (3). Тогда в условиях Теоремы 2 справедливы асимптотические разложения*

$$\tilde{\beta}^*_n(\theta_n) = \Phi(t - u_\alpha) + \frac{t\gamma}{8n} \cdot \phi(t - u_\alpha)(1 - tu_\alpha + t^2) + o\big(n^{-1}\big),$$

$$\tilde{\beta}_n(\theta_n) = \Phi(t - u_\alpha) + \frac{t\gamma}{8n} \cdot \phi(t - u_\alpha)(1 - tu_\alpha + t^2) - \frac{t \cdot u_\alpha^2}{4\ n} \cdot \phi(t - u_\alpha) + o(n^{-1}).$$

Эти критерии имеют, соответственно, асимптотические дефекты $\bar{d}^*_2$ и $\bar{d}_2$ относительно наилучшего критерия с мощностью

$$\beta^*_n(\theta_n) = \Phi(t - u_\alpha),$$

вида

$$\bar{d}_2^* = -\gamma \cdot \frac{1 - tu_\alpha + t^2}{4}, \quad \bar{d}_2 = -\gamma \cdot \frac{1 - tu_\alpha + t^2 + 2u_\alpha^2}{4}$$

и дефект между собой, равный

$$\tilde{d}_{22}^* = \frac{u_\alpha^2}{2}.$$

Замечание 4. Заметим, что если рассмотреть усредненные мощности, то указанные в Теореме 5 критерии имеют, соответственно, усредненные мощности вида

$$\Phi(t - u_\alpha)$$

и

$$\Phi(t - u_\alpha) + \frac{t\gamma \cdot u_\alpha^2}{4n} \cdot \phi(t - u_\alpha) + o(n^{-1}).$$

При этом из Теоремы 2 следует, что их дефект равен $u_\alpha^2/2$.

Заключение

В работе рассмотрено применение распределения Делапорта к анализу асимптотического поведения мощностей критериев в случае выборок случайного объема и фиксированном уровне значимости, в задаче проверки простой гипотезы, касающейся одномерного параметра, против последовательности близких сложных альтернатив. Определяются мощности критериев в случае выборок со случайным объемом. Для асимптотического сравнения мощностей критериев используется понятие дефекта, смысл которого состоит в том, что это добавочное число наблюдений, необходимое конкурирующему критерию для асимптотического достижения мощности наилучшего критерия. Приведены явные формулы для асимптотического дефекта. Рассмотрены три примера, иллюстрирующие полученные результаты. В этих примерах рассмотрены конкретные распределения случайного индекса, описывающего случайный объем выборки, и конкретные критерии в случае нормальных выборок. Первый пример касается усеченного в нуле биномиального распределения, во втором примере рассматривается усеченное в нуле распределение Пуассона, а в третьем примере рассмотрено распределение Делапорта.

Список литературы

[1] Delaporte P. Quelques problemes de statistique mathematique poses par l'assurance automobile et le bonus pour non sinistre // Bulletin Trimestrial de l'Institut des Actuaries Francaise. 1959. Vol. 227. Pp. 87–102.

[2] Delaporte P. Un probleme de l'assurance accidents d'automobiles examine par la statistique mathematique // Transactions of 16th International Congress of Actuaries. 1960. Pp. 121–135.

[3] Гнеденко Б.В. Об оценке неизвестных параметров распределения при случайном числе независимых наблюдений // Труды Тбилисского Математического института. 1989. Т. 92. С. 146–150.

[4] Гнеденко Б.В., Фахим Х. Об одной теореме переноса // Доклады Академии наук СССР. 1969. Т. 187. С. 15–17.

[5] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Об использовании распределения Стьюдента в задачах теории вероятностей и математической статистики // Теория вероятностей и ее применения. 2004. Т. 49, № 3. С. 417–435. https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159

[6] Bening V.E., Korolev V.Yu. Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance. Utrecht: VSP, 2002. 434 p.

[7] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Некоторые статистические задачи, связанные с распределением Лапласа // Информатика и ее применения. 2008. Т. 2, № 2. С. 19–34.

[8] Bening V.E. Transfer theorems concerning asymptotic expansions for the distribution functions of statistics based on samples with random sizes // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. 2018. Vol. 28, № 2. Pp. 187–200.

[9] Bening V.E. On the asymptotic deficiency of some statistical estimators based on samples with random sizes // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. 2018. Vol. 21, № 2. Pp. 185–193.

[10] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении квантилей распределений статистик, основанных на выборках случайного объема // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 5–12. https://doi.org/10.26456/vtpmk175

[11] Бенинг В.Е. О поведении асимптотического дефекта квантилей распределений статистик, основанных на выборках случайного объема // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 42–57. https://doi.org/10.26456/vtpmk509

[12] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении резерва страховой компании // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 35–48. https://doi.org/10.26456/vtpmk594

[13] Бенинг В.Е. О сравнении необходимых резервов организаций, подверженных риску, с помощью понятия дефект // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 5–26. https://doi.org/10.26456/vtpmk643

[14] Lehmann E.L., Casella G. Theory of Point Estimation. Berlin: Springer, 1998. 589 p.

[15] Hodges J.L., Lehmann E.L. Deficiency // The Annals of Mathematical Statistics. 1970. Vol. 41, № 5. Pp. 783–801.

[16] Bening V.E. Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses: Efficient Statistics, Optimality, Power Loss, and Deficiency. Berlin: Walter de Gruyter, 2011. 299 p.

[17] Znidaric M. Asymptotic expansion for inverse moments of binomial and Poisson distributions. arXiv:math/0511226v1[math.ST]. 2005.

Образец цитирования

Бенинг В.Е. О применении распределения Делапорта в задачах проверки гипотез // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. №4. С. 5–24. https://doi.org/10.26456/vtpmk756

Сведения об авторах

1. **Бенинг Владимир Евгеньевич**
профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: bening@yandex.ru

ON THE APPLICATION OF THE DELAPORTE DISTRIBUTION TO THE TESTING STATISTICAL HYPOTHESES

Bening V.E.
Lomonosov Moscow State University, Moscow

Received 10.08.2025, revised 06.09.2025.

The paper considers the application of the Delaporte distribution to the analysis of the asymptotic behavior of the criterion capacities in the case of random samples in the task of testing a simple hypothesis concerning a one-dimensional parameter against a sequence of close alternatives. This distribution describes a random sample size.The concept of criterion power is introduced in this case. An asymptotic comparison of specific criteria (in the case of normal samples) is carried out using the concept of defect, which is an additional number of observations required by a competing criterion to asymptotically achieve the power of the best criterion.

Keywords: Delaporte distribution, power of test, level, asymptotic deficiency, hypotheses testing, efficiency, sample with random size, random index, asymptotic expansions, truncated Poisson distribution, truncated binomial distribution.

Citation

Bening V.E., "On the application of the Delaporte distribution to the testing statistical hypotheses", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2025, № 4, 5–24 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk756

References

[1] Delaporte P., "Quelques problemes de statistique mathematique poses par l'assurance automobile et le bonus pour non sinistre", *Bulletin Trimestrial de l'Institut des Actuaries Francaise*, **227** (1959), 87–102.

[2] Delaporte P., "Un probleme de l'assurance accidents d'automobiles examine par la statistique mathematique", *Transactions of 16th International Congress of Actuaries*, 1960, 121–135.

[3] Gnedenko B.V., "On the estimation of unknown distribution parameters for a random number of independent observations", *Trudy Tbilisskogo Matematicheskogo instituta [Proceedings of the Tbilisi Mathematical Institute]*, **92** (1989), 146–150 (in Russian).

[4] Gnedenko B.V., Fakhim Kh., "On a transfer theorem", *Doklady Mathematics*, **187** (1969), 15–17 (in Russian).

[5] Bening V.E., Korolev V.Y., "On an application of the Student distribution in the theory of probability and mathematical statistics", *Theory of Probability and its Applications*, **49**:3 (2005), 377–391, https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159.

[6] Bening V.E., Korolev V.Yu., *Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance*, VSP, Utrecht, 2002, 434 pp.

[7] Bening V.E., Korolev V.Yu., "Some statistical problems related to the Laplace distribution", *Informatics and Applications*, **2**:2 (2008), 19–34 (in Russian).

[8] Bening V.E., "Transfer theorems concerning asymptotic expansions for the distribution functions of statistics based on samples with random sizes", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **28**:2 (2018), 187–200.

[9] Bening V.E., "On the asymptotic deficiency of some statistical estimators based on samples with random sizes", *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, **21**:2 (2018), 185–193.

[10] Bening V.E., "On asymptotic behavior of quantiles of the distributions of statistics based on the samples with random sizes", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 5–12 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk175.

[11] Bening V.E., "On asymptotic behavior of quantiles deficiencies of the distributions of statistics based on the samples with random sizes", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2018, № 3, 42–57 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk509.

[12] Bening V.E., "On the asymptotic behavior of insurance company reserve", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 35–48 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk594.

[13] Bening V.E., "On the organizations' risk reserves comparison based on the deficiency concept", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 3, 5–26 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk643.

[14] Lehmann E.L., Casella G., *Theory of Point Estimation*, Springer, Berlin, 1998, 589 pp.

[15] Hodges J.L., Lehmann E.L., "Deficiency", *The Annals of Mathematical Statistics*, **41**:5 (1970), 783–801.

[16] Bening V.E., *Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses: Efficient Statistics, Optimality, Power Loss, and Deficiency*, Walter de Gruyter, Berlin, 2011, 299 pp.

[17] Znidaric M., *Asymptotic expansion for inverse moments of binomial and Poisson distributions*, arXiv:math/0511226v1[math.ST], 2005.

Author Info

1. **Bening Vladimir Evgenyevich**
   Professor at the Department of Mathematical Statistics, Lomonosov Moscow State University.

   Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
   E-mail: bening@yandex.ru