УДК 517.95, 532.5

О ПОСТРОЕНИИ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ

Шеретов Ю.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 21.01.2026, после переработки 10.02.2026.

Статья посвящена отысканию новых точных решений квазигидродинамической системы для слабосжимаемой вязкой жидкости в цилиндрических координатах. Комбинация известных результатов теории уравнений Навье–Стокса и теорем автора позволила построить некоторые однородно-винтовые решения. На основе установленного автором принципа суперпозиции удалось получить решения, не являющиеся винтовыми, но удовлетворяющие обобщенному условию Громеки–Бельтрами. Все выписанные решения квазигидродинамической системы являются также точными решениями классической системы Навье–Стокса в динамике несжимаемой вязкой жидкости.

Ключевые слова: квазигидродинамическая система, система Навье–Стокса, точное решение, принцип суперпозиции.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 1. С. 5–24.
https://doi.org/10.26456/vtpmk770

Введение

Построению точных решений системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости посвящена обширная научная литература. Ограничимся ссылками [1–13]. В монографиях [14–17] выведена и исследована квазигидродинамическая (КГД) система, которая отличается от системы Навье–Стокса дополнительными дивергентными членами. Эта статья посвящена поиску новых классов точных решений квазигидродинамической системы для слабосжимаемой вязкой жидкости в цилиндрических координатах. Все построенные решения удовлетворяют также классической системе Навье–Стокса.

Для связности изложения приведены в единых обозначениях подробные доказательства некоторых известных результатов в теории Навье–Стокса. Они дополнены опубликованными теоремами автора по квазигидродинамической системе.

На основе указанных теоретических положений построены некоторые однородно-винтовые решения, которые для КГД системы являются новыми. С помощью установленного автором принципа суперпозиции найдены новые решения КГД системы, не являющиеся однородно-винтовыми. Они удовлетворяют также системе Навье–Стокса и подчиняются обобщенному условию Громеки–Бельтрами.

1. Квазигидродинамическая система. Система Навье–Стокса. Общие точные решения. Цилиндрические координаты

Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости без учета внешних сил имеет вид

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \vec{w}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \big((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla\big)\vec{u} + \nabla p = \nu\Delta\vec{u} + \nu\nabla\big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big) + \mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{w}). \tag{1.2}$$

Вектор $\vec{w}$ определяется по формуле

$$\vec{w} = \tau\big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p\big). \tag{1.3}$$

Символом ν обозначен коэффициент кинематической вязкости. Он является заданной положительной константой. Постоянная средняя плотность жидкости ρ считается равной единице. Оператор Лапласа Δ действует в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$. Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2}, \tag{1.4}$$

где c_s – скорость звука в жидкости.

Если в (1.1) – (1.2) пренебречь слагаемыми, содержащими τ, то получим систему Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости:

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = \nu\Delta\vec{u}. \tag{1.6}$$

Пусть Ω – область в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}} \times \mathbb{R}_t$. Решения $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},\ t) \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$, $p = p(\vec{x},\ t) \in C^\infty(\Omega)$ систем Навье–Стокса и КГД будем называть *гладкими решениями.*

Теорема 1 (Ю.В.Шеретов [16]). *Пусть* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $p = p(\vec{x}, t)$ *– гладкое решение системы Навье–Стокса* (1.5) – (1.6). *Для того, чтобы пара* $(\vec{u}, p)$ *являлась точным решением квазигидродинамической системы* (1.1) – (1.2), *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}\right) + \left(\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}\right) \cdot \nabla\right)\vec{u} = 0. \tag{1.7}$$

Выпишем квазигидродинамическую систему без учета влияния внешних сил в цилиндрических координатах для случая неустановившихся течений:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rw_r)}{\partial r} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial t} + (u_r - w_r)\frac{\partial u_r}{\partial r} + (u_z - w_z)\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{u_\varphi w_\varphi}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} =\\ = \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2}\right) + \nu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) +\\ + \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_rw_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_zw_r)}{\partial z} - \frac{u_\varphi w_\varphi}{r},\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + (u_r - w_r)\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + (u_z - w_z)\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} - \frac{w_r u_\varphi}{r} =\\ = \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_rw_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial(u_zw_\varphi)}{\partial z} + \frac{u_r w_\varphi}{r},\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_z}{\partial t} + (u_r - w_r)\frac{\partial u_z}{\partial r} + (u_z - w_z)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} =\\ = \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + \nu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) +\\ + \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_rw_z)}{\partial r} + \frac{\partial(u_zw_z)}{\partial z}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь

$$w_r = \tau\left(u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r}\right), \tag{1.12}$$

$$w_\varphi = \tau\left(u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r}\right), \tag{1.13}$$

$$w_z = \tau\left(u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z}\right). \tag{1.14}$$

Параметр τ определяется с помощью выражения

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2}, \tag{1.15}$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Связь декартовых координат $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ с цилиндрическими координатами (r, φ, z) дается равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z. \tag{1.16}$$

Соответствующая система Навье–Стокса имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\varphi^2}{r}+\frac{\partial p}{\partial r}=\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\Big)+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{u_r}{r^2}\right), \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{u_r u_\varphi}{r}=\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\Big)+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}-\frac{u_\varphi}{r^2}\right), \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}=\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big)+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right). \tag{1.20}$$

Неизвестными величинами в обеих системах являются компоненты $u_r = u_r(r, z, t)$, $u_\varphi = u_\varphi(r, z, t)$, $u_z = u_z(r, z, t)$ вектора скорости $\vec{u}$ в ортонормированном локальном базисе $(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_z)$ и давление $p = p(r, z, t)$. Таким образом, зависимость макропараметров среды от угла φ не учитывается.

2. Построение точных однородно-винтовых решений квазигидродинамической системы в цилиндрических координатах

Рассмотрим уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial \varPhi}{\partial r}\Big)+\frac{\partial^2 \varPhi}{\partial z^2}=-\lambda^2\varPhi, \quad r>0, \tag{2.1}$$

а также частный случай (см. [11]) уравнения Грэда–Шафранова

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}=-\lambda^2\psi, \quad r>0. \tag{2.2}$$

Здесь λ – заданная положительная постоянная, $\varPhi = \varPhi(r, z)$ и $\psi = \psi(r, z)$ – неизвестные бесконечно дифференцируемые функции, которые будем назвать гладкими.

Теорема 2 (О.И.Богоявленский [11]). *Если $\varPhi = \varPhi(r, z)$ – гладкое решение уравнения Гельмгольца* (2.1) *и*

$$\psi = r\frac{\partial \varPhi}{\partial r}, \tag{2.3}$$

то $\psi = \psi(r, z)$ – гладкое решение уравнения Грэда–Шафранова (2.2). *Если $\psi = \psi(r, z)$ – гладкое решение уравнения Грэда–Шафранова* (2.2) *и*

$$\varPhi = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{2.4}$$

то $\varPhi = \varPhi(r, z)$ – гладкое решение уравнения Гельмгольца (2.1).

Доказательство. Пусть $\varPhi = \varPhi(r, z)$ – гладкое решение уравнения Гельмгольца (2.1). Определим $\psi = \psi(r, z)$ с помощью (2.3). Из (2.1) и (2.3) следует равенство

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}+\frac{\partial^2 \varPhi}{\partial z^2}=-\lambda^2\varPhi. \tag{2.5}$$

Подействуем оператором $\partial/\partial r$ на обе части (2.5). Будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 \varPhi}{\partial z^2}\right)=-\lambda^2\frac{\partial \varPhi}{\partial r}. \tag{2.6}$$

Пользуясь правилами дифференцирования и теоремой Шварца о равенстве смешанных производных, преобразуем (2.6) к виду

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial\varPhi}{\partial r}\right)=-\lambda^2\frac{\partial\varPhi}{\partial r}. \tag{2.7}$$

Умножив обе части (2.2) на r и применив формулу (2.3), получим уравнение Грэда–Шафранова (2.2).

Пусть теперь $\psi=\psi(r,z)$ – гладкое решение уравнения Грэда–Шафранова (2.2). Найдем $\varPhi=\varPhi(r,z)$ с помощью (2.4). Подействуем оператором $\partial/\partial r$ на обе части (2.7). Это дает

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=-\lambda^2\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{2.8}$$

Эквивалентная запись (2.8) такова:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=-\lambda^2\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{2.9}$$

Принимая во внимание (2.4), перейдем в (2.9) от функции ψ к функции $\varPhi$. Получим равенство

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(r\varPhi\big)-\frac{1}{r}\frac{\partial\varPhi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varPhi}{\partial z^2}=-\lambda^2\varPhi, \tag{2.10}$$

которое эквивалентно уравнению Гельмгольца (2.1). □

Теорема 3 (С.Чандрасекар, П.К.Кендалл [18]). *Пусть $\varPhi=\varPhi(\vec{x})$ – гладкое (бесконечно дифференцируемое) решение уравнения Гельмгольца*

$$\Delta\varPhi=-\lambda^2\varPhi, \tag{2.11}$$

в котором $\lambda=const>0$,

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– трехмерный оператор Лапласа. Символом $\vec{n}=\big(n_x,n_y,n_z\big)$ обозначим произвольный фиксированный единичный вектор в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$. Тогда векторное поле $\vec{A}=\vec{A}\big(\vec{x}\big)$, определяемое формулой

$$\vec{A}=\frac{1}{\lambda}\mathrm{rotrot}\big(\vec{n}\varPhi\big)+\mathrm{rot}\big(\vec{n}\varPhi\big), \tag{2.12}$$

является решением уравнения Громеки–Бельтрами

$$\mathrm{rot}\ \vec{A}=\lambda\vec{A}. \tag{2.13}$$

Здесь

$$\mathrm{rot}\ \vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $\varPhi = \varPhi(\vec{x})$ – гладкое решение уравнения (2.11). Подставим его в (2.11), а затем умножим обе части полученного равенства на постоянный вектор $\vec{n}$. Будем иметь

$$\vec{n}\Delta\varPhi = -\lambda^2\vec{n}\varPhi. \tag{2.14}$$

Эквивалентная запись (2.14) такова:

$$\Delta\big(\vec{n}\varPhi\big) = -\lambda^2\vec{n}\varPhi. \tag{2.15}$$

Подействуем оператором rot на обе части (2.15):

$$\mathrm{rot}\Delta\big(\vec{n}\varPhi\big) = -\lambda^2\mathrm{rot}\big(\vec{n}\varPhi\big). \tag{2.16}$$

В соответствии с правилами дифференцирования из (2.16) получаем

$$\Delta\Big(\mathrm{rot}\big(\vec{n}\varPhi\big)\Big) = -\lambda^2\mathrm{rot}\big(\vec{n}\varPhi\big). \tag{2.17}$$

Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\ \vec{A} = \mathrm{rot}\ &\left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{rotrot}\big(\vec{n}\varPhi\big) + \mathrm{rot}\big(\vec{n}\varPhi\big)\right) = \\
&= \lambda\left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{rotrot}\big(\vec{n}\varPhi\big) + \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{rotrot}\Big(\mathrm{rot}\big(\vec{n}\varPhi\big)\Big)\right) = \\
&= \lambda\left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{rotrot}\big(\vec{n}\varPhi\big) + \frac{1}{\lambda^2}\nabla\mathrm{div}\Big(\mathrm{rot}\big(\vec{n}\varPhi\big)\Big) - \frac{1}{\lambda^2}\Delta\Big(\mathrm{rot}\big(\vec{n}\varPhi\big)\Big)\right) = \\
&= \lambda\left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{rotrot}\big(\vec{n}\varPhi\big) + \mathrm{rot}\big(\vec{n}\varPhi\big)\right) = \lambda\vec{A}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Из (2.18) следует (2.13). При проведении формальных выкладок было использовано равенство (2.17). Учтены также известные (см. [1]) векторные тождества

$$\mathrm{rotrot}\vec{H} = \nabla\big(\mathrm{div}\vec{H}\big) - \Delta\vec{H}, \tag{2.19}$$

$$\mathrm{div}\big(\mathrm{rot}\vec{L}\big) = 0, \tag{2.20}$$

для

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\big(\vec{n}\varPhi\big), \qquad \vec{L} = \vec{n}\varPhi. \tag{2.21}$$

□

Следствие 1. *Рассмотрим векторное поле*

$$\vec{B} = -\lambda\vec{A} = -rotrot\big(\vec{n}\varPhi\big) - \lambda rot\big(\vec{n}\varPhi\big), \tag{2.22}$$

которое отличается от $\vec{A}$ лишь постоянным множителем. Ясно, что $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x})$ также является решением уравнения Громеки–Бельтрами

$$rot\ \vec{B} = \lambda\vec{B}. \tag{2.23}$$

Теорема 4. *Пусть $\Phi = \Phi(r, z)$ – гладкое решение уравнения Гельмгольца* (2.1). *Тогда векторное поле*

$$\vec{B} = \vec{B}(r, z) = -\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\Big)\vec{e}_r + \lambda\frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\Big)\vec{e}_z \tag{2.24}$$

удовлетворяет уравнению Громеки–Бельтрами (2.23)*. Здесь* $(\vec{e}_r,\ \vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_z)$ *– ортонормированный локальный базис в цилиндрической системе координат.*

Доказательство. В формуле (2.22) положим $\vec{n} = \vec{e}_z$. Далее в (2.22) воспользуемся известной (см. [1]) формулой вычисления ротора векторного поля $\vec{H} = H_r\vec{e}_r + H_\varphi\vec{e}_\varphi + H_z\vec{e}_z$ в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{rot}\,\vec{H} = \Big(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\Big)\vec{e}_r + \Big(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\Big)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi}\Big)\vec{e}_z. \tag{2.25}$$

Получим (2.24). В силу следствия из теоремы 5 векторное поле $\vec{B} = \vec{B}(r, z)$ удовлетворяет уравнению Громеки–Бельтрами (2.23). □

Теорема 5 (О.И.Богоявленский [11]). *Пусть $\psi = \psi(r, z)$ – гладкое решение уравнения Грэда–Шафранова* (2.2)*. Тогда векторное поле*

$$\vec{B} = \vec{B}(r, z) = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}\vec{e}_r + \frac{\lambda\psi}{r}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\vec{e}_z \tag{2.26}$$

удовлетворяет уравнению Громеки–Бельтрами (2.23).

Доказательство. Принимая во внимание (2.4), преобразуем (2.24) к виду (2.26). По теореме 4 поле $\vec{B} = \vec{B}(r, z)$, определяемое формулой (2.26), удовлетворяет уравнению Громеки–Бельтрами (2.23). □

Замечание 1. В [11] приведено другое доказательство. Равенство (2.23) было проверено непосредственно с помощью формул (2.2), (2.25) и (2.26). Однако оставался невыясненным вопрос, из каких соображений получена сама формула (2.26).

Теорема 6 (Ю.В.Шеретов [16]). *Пусть существует такая постоянная* $\lambda > 0$*, что на* $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ *выполнено соотношение*

$$\operatorname{rot}\,\vec{u}_0 = \lambda\vec{u}_0. \tag{2.27}$$

Тогда пара функций

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_0(\vec{x})\exp(-\lambda^2\nu t), \tag{2.28}$$

$$p = p(\vec{x}, t) = C(t) - \frac{\vec{u}_0^2(\vec{x})}{2}\exp(-2\lambda^2\nu t) \tag{2.29}$$

задает при $t \geqslant 0$ *точное однородно-винтовое решение как системы Навье–Стокса* (1.5) – (1.6)*, так и квазигидродинамической системы* (1.1) – (1.2)*. Символом* $C(t)$ *обозначена любая непрерывная при* $t \geqslant 0$ *функция времени.*

Замечание 2. Для векторного поля (2.28) выполняются равенства

$$\operatorname{rot}\,\vec{u} = \lambda\vec{u}, \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u} = 0. \tag{2.31}$$

Кроме того, справедливо условие (1.7).

3. Примеры точных однородно-винтовых решений квазигидродинамической системы в цилиндрических координатах

Пример 1. Пусть $\varPhi = \varPhi(r)$. Тогда уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{d^2\varPhi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varPhi}{dr} + \lambda^2\varPhi = 0, \quad r > 0. \tag{3.1}$$

Введем новую функцию $f = f(\xi)$, которая связана с $\varPhi(r)$ равенством

$$f(\xi) = \varPhi(r), \quad \xi = \lambda r. \tag{3.2}$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\xi^2\frac{d^2f}{d\xi^2} + \xi\frac{df}{\partial\xi} + \xi^2 f = 0, \quad \xi > 0, \tag{3.3}$$

которое представляет собой частный случай уравнения Бесселя

$$\xi^2\frac{d^2f}{d\xi^2} + \xi\frac{df}{\partial\xi} + \big(\xi^2 - l^2\big)f = 0, \quad \xi > 0, \tag{3.4}$$

при $l = 0$. Частное решение уравнения (3.4) при $l = 0$ (см., например, [19]) имеет вид

$$f(\xi) = C_1 J_0(\xi), \tag{3.5}$$

где

$$J_0(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\Big(\frac{\xi}{2}\Big)^{2k} \tag{3.6}$$

– цилиндрическая функция Бесселя первого рода, C_1 – произвольная постоянная. Здесь $(-1)^0 = 1$ по определению.

Соответственно, частное решение уравнения (3.1) выглядит следующим образом

$$\varPhi(r) = C_1 J_0(\lambda r). \tag{3.7}$$

По формуле (2.24) вычислим векторное поле

$$\vec{B} = \vec{B}(r) = \lambda\frac{d\varPhi}{dr}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big(r\frac{d\varPhi}{dr}\Big)\vec{e}_z = \lambda\frac{d\varPhi}{dr}\vec{e}_\varphi + \Big(\frac{d^2\varPhi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varPhi}{dr}\Big)\vec{e}_z =$$

$$= \lambda\frac{d\varPhi}{dr}\vec{e}_\varphi - \lambda^2\varPhi\vec{e}_z = \lambda^2 C_1\Big(J_0'(\lambda r)\vec{e}_\varphi - J_0(\lambda r)\vec{e}_z\Big) =$$

$$= -\lambda^2 C_1 \Big(J_1(\lambda r)\vec{e}_\varphi + J_0(\lambda r)\vec{e}_z \Big) = A_0 \Big(J_1(\lambda r)\vec{e}_\varphi + J_0(\lambda r)\vec{e}_z \Big), \tag{3.8}$$

где $A_0 = -\lambda^2 C_1$. Будем считать, что $A_0 \neq 0$. При проведении формальных выкладок были учтены равенства (3.1) и (3.5). Символом $J_1(\lambda r) = J_1(\xi)$ обозначена цилиндрическая функция первого рода, определяемая равенством

$$J_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 (k+1)} \Big(\frac{\xi}{2}\Big)^{2k+1}. \tag{3.9}$$

Она является частным решением уравнения Бесселя (3.4) при $l = 1$ и связана с $J_0(\xi)$ соотношением $J_1(\xi) = -J_0'(\xi)$.

Воспользовавшись теоремой 6 и полагая $\vec{u}_0 = \vec{B}$, получаем однородно-винтовое решение квазигидродинамической системы

$$\vec{u} = A_0 \Big(J_1(\lambda r)\vec{e}_\varphi + J_0(\lambda r)\vec{e}_z \Big) \exp(-\lambda^2 \nu t), \tag{3.10}$$

$$p = C(t) - \frac{A_0^2}{2} \Big(J_1^2(\lambda r) + J_0^2(\lambda r) \Big) \exp(-2\lambda^2 \nu t). \tag{3.11}$$

Для системы Навье–Стокса это решение было построено впервые итальянским математиком Бруто Кальдонаццо (см. [6], [7]).

Пример 2. Нетрудно проверить, что функция

$$\varPhi = \varPhi(r, z) = C_2 \frac{\sin\big(\lambda\sqrt{r^2+z^2}\big)}{\sqrt{r^2+z^2}}, \tag{3.12}$$

где вещественная константа $C_2 \neq 0$, является нетривиальным решением уравнения Гельмгольца (2.1). Запишем (3.12) в виде

$$\varPhi = \lambda C_2 \frac{\sin u_*}{u_*}, \quad u_* = \lambda\sqrt{r^2+z^2}. \tag{3.13}$$

По формуле (2.24) находим

$$\vec{B} = \vec{B}(r, z) = B_r \vec{e}_r + B_\varphi \vec{e}_\varphi + B_z \vec{e}_z, \tag{3.14}$$

где компоненты вектора $\vec{B}$ вычисляются по формулам

$$B_r = -\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial \varPhi}{\partial r}\Big) = \lambda^5 C_2 \frac{1}{u_*^4}\Big((3-u_*^2)\frac{\sin u_*}{u_*} - 3\cos u \Big) rz, \tag{3.15}$$

$$B_\varphi = \lambda \frac{\partial \varPhi}{\partial r} = \lambda^4 C_2 \frac{1}{u_*^2}\Big(\cos u_* - \frac{\sin u_*}{u_*} \Big) r, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial \varPhi}{\partial r}\Big) = \frac{\partial^2 \varPhi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varPhi}{\partial r} = \\ &= \lambda^3 C_2 \frac{1}{u_*^2}\Big(\cos u_* - \frac{\sin u_*}{u_*} \Big) + \lambda^5 C_2 \frac{1}{u_*^4}\Big((3-u_*^2)\frac{\sin u_*}{u_*} - 3\cos u_* \Big) r^2. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Заметим, что поле $\vec{B} = \vec{B}(r, z)$ не имеет особенности в точке $(0, 0)$, поскольку

$$\lim_{u_* \to +0} \frac{1}{u_*^2}\Big(\cos u_* - \frac{\sin u_*}{u_*}\Big) = -\frac{1}{3}, \tag{3.18}$$

$$\lim_{u_* \to +0} \frac{1}{u_*^4}\Big((3 - u_*^2)\frac{\sin u_*}{u_*} - 3\cos u_*\Big) = \frac{1}{15}. \tag{3.19}$$

Пользуясь теоремой 6 и полагая $\vec{u}_0 = \vec{B}$, выписываем однородно-винтовое решение квазигидродинамической системы

$$\vec{u} = \vec{B}\exp(-\lambda^2 \nu t), \tag{3.20}$$

$$p = C(t) - \frac{1}{2}\Big(B_r^2 + B_\varphi^2 + B_z^2\Big)\exp(-2\lambda^2 \nu t). \tag{3.21}$$

Набор функций (3.20) – (3.21) является также точным однородно-винтовое решением Навье–Стокса. Это решение было известно и исследовалось, например, в [11].

4. Принципы суперпозиции решений

Продолжим построение новых точных решений квазигидродинамической системы, которые удовлетворяют также классической системе Навье–Стокса. Для этого потребуются некоторые теоретические результаты.

Теорема 7 (П.Л.Бхатнагар, П.Д.Верма [8]). *Пусть* $\big(\vec{u}^{(1)}, p^{(1)}\big)$ *и* $\big(\vec{u}^{(2)}, p^{(2)}\big)$ *– два гладких решения системы Навье–Стокса* (1.5) – (1.6)*, и существует такая функция* $\Xi = \Xi(\vec{x}, t)$*, что выполнено условие*

$$\big[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(2)}\big] + \big[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(1)}\big] = \nabla\Xi. \tag{4.1}$$

Здесь

$$\vec{\omega}^{(1)} = \mathrm{rot}\ \vec{u}^{(1)}, \qquad \vec{\omega}^{(2)} = \mathrm{rot}\ \vec{u}^{(2)}. \tag{4.2}$$

Тогда пара функций $(\vec{u}, p)$*, где*

$$\vec{u} = \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}, \tag{4.3}$$

$$p = p^{(1)} + p^{(2)} - \big(\vec{u}^{(1)} \cdot \vec{u}^{(2)}\big) + \Xi, \tag{4.4}$$

также является решением указанной системы Навье–Стокса.

Доказательство. Запишем систему (1.5) – (1.6) в форме Громеки–Лэмба

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p\Big) = \big[\vec{u} \times \vec{\omega}\big] + \nu\Delta\vec{u}. \tag{4.6}$$

Здесь

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\ \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}, \tag{4.7}$$

векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные орты правой декартовой системы координат $oxyz$.

По условию теоремы div $\vec{u}^{(1)} = 0$ и div $\vec{u}^{(2)} = 0$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \left(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\right) = 0, \tag{4.8}$$

и равенство (4.5) выполняется.

Последовательная подстановка $\left(\vec{u}^{(1)}, p^{(1)}\right)$ и $\left(\vec{u}^{(2)}, p^{(2)}\right)$ в (4.6) дает

$$\frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t} + \nabla\Big(\frac{\left(\vec{u}^{(1)}\right)^2}{2} + p^{(1)}\Big) = \left[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(1)}\right] + \nu\Delta\vec{u}^{(1)}, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t} + \nabla\Big(\frac{\left(\vec{u}^{(2)}\right)^2}{2} + p^{(2)}\Big) = \left[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(2)}\right] + \nu\Delta\vec{u}^{(2)}. \tag{4.10}$$

Складывая (4.9) и (4.10), получим

$$\frac{\partial\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big)}{\partial t} + \nabla\Big(\frac{\left(\vec{u}^{(1)}\right)^2}{2} + \frac{\left(\vec{u}^{(2)}\right)^2}{2} + p^{(1)} + p^{(2)}\Big) =$$

$$= \left[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(1)}\right] + \left[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(2)}\right] + \nu\Delta\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big). \tag{4.11}$$

По свойствам векторного произведения

$$\left[\left(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\right) \times \left(\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}\right)\right] = \left[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(1)}\right] + \left[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(2)}\right] +$$

$$+ \left[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(2)}\right] + \left[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(1)}\right]. \tag{4.12}$$

Принимая во внимание (4.1), преобразуем (4.12) к виду

$$\left[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(1)}\right] + \left[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(2)}\right] = \left[\left(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\right) \times \left(\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}\right)\right] - \nabla\Xi. \tag{4.13}$$

Подстановка (4.13) в (4.11) дает

$$\frac{\partial\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big)}{\partial t} + \nabla\Big(\frac{\left(\vec{u}^{(1)}\right)^2}{2} + \frac{\left(\vec{u}^{(2)}\right)^2}{2} + p^{(1)} + p^{(2)} + \Xi\Big) =$$

$$= \left[\left(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\right) \times \left(\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}\right)\right] + \nu\Delta\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big). \tag{4.14}$$

Представим (4.14) в эквивалентной форме

$$\frac{\partial\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big)}{\partial t} + \nabla\Big(\frac{\left(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\right)^2}{2} + p^{(1)} + p^{(2)} - \left(\vec{u}^{(1)} \cdot \vec{u}^{(2)}\right) + \Xi\Big) =$$

$$= \left[\left(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\right) \times \left(\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}\right)\right] + \nu\Delta\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big). \tag{4.15}$$

Отсюда следует, что пара функций $(\vec{u}, p)$, определяемых формулами (4.3) и (4.4), удовлетворяет уравнению (4.6). Таким образом, $(\vec{u}, p)$ – решение системы Навье–Стокса. □

Теорема 8 (Ю.В.Шеретов [16]). *Пусть* $\left(\vec{u}^{(1)}, p^{(1)}\right)$ *и* $\left(\vec{u}^{(2)}, p^{(2)}\right)$ *– два гладких решения переопределенной системы* (1.5) – (1.7), *и существует такая функция* $\Xi = \Xi(\vec{x}, t)$, *что выполнены условия*

$$\left[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(2)}\right] + \left[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(1)}\right] = \nabla\Xi, \tag{4.16}$$

$$\left(\vec{u}^{(1)} \cdot \nabla\right)\left(\frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(2)}\right) + \left(\left(\frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(2)}\right) \cdot \nabla\right)\vec{u}^{(1)} +$$
$$+\left(\vec{u}^{(2)} \cdot \nabla\right)\left(\frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(1)}\right) + \left(\left(\frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(1)}\right) \cdot \nabla\right)\vec{u}^{(2)} = 0. \tag{4.17}$$

Тогда пара $(\vec{u}, p)$, *где*

$$\vec{u} = \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}, \tag{4.18}$$

$$p = p^{(1)} + p^{(2)} - \left(\vec{u}^{(1)} \cdot \vec{u}^{(2)}\right) + \Xi, \tag{4.19}$$

является решением квазигидродинамической системы (1.1) – (1.2).

5. Примеры точных решений квазигидродинамической системы в цилиндрических координатах, построенных с помощью принципа суперпозиции

Пример 3. В качестве $\left(\vec{u}^{(1)}, p^{(1)}\right)$ возьмем нестационарное решение системы Навье–Стокса (1.17) – (1.20), построенное Кальдонаццо:

$$\vec{u}^{(1)} = A_0\Big(J_1(\lambda r)\vec{e}_\varphi + J_0(\lambda r)\vec{e}_z\Big)\exp(-\lambda^2\nu t), \tag{5.1}$$

$$p^{(1)} = C(t) - \frac{A_0^2}{2}\Big(J_1^2(\lambda r) + J_0^2(\lambda r)\Big)\exp(-2\lambda^2\nu t). \tag{5.2}$$

Оно подробно разобрано в примере 1. Равенство (1.7) для $\vec{u} = \vec{u}^{(1)}$ выполняется.

Рассмотрим еще одно стационарное решение $\left(\vec{u}^{(2)}, p^{(2)}\right)$ указанной системы Навье–Стокса вида

$$\vec{u}^{(2)} = \left(\frac{\omega_0}{2}r + \frac{\Gamma}{2\pi r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{A}{4\nu}r^2 + B\ln r + C\right)\vec{e}_z, \tag{5.3}$$

$$p^{(2)} = \frac{\omega_0^2}{8}r^2 + \frac{\omega_0\Gamma}{2\pi}\ln r - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r^2} + Az + C_1, \quad r > 0, \tag{5.4}$$

построенное К.И.Страховичем (см. [5], с. 140). Здесь ω_0, Γ, A, B, C и C_1 – действительные константы. Будем считать, что $\omega_0 \neq 0$ и $A \neq 0$. Векторное поле $\vec{u}^{(2)}$ имеет завихренность

$$\vec{\omega}^{(2)} = \mathrm{rot}\ \vec{u}^{(2)} = -\left(\frac{A}{2\nu}r + \frac{B}{r}\right)\vec{e}_\varphi + \omega_0\vec{e}_z. \tag{5.5}$$

Вычислим $\Delta\vec{u} = \Delta\vec{u}^{(2)}$ по формуле

$$\Delta\vec{u} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2}\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big)+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big)\vec{e}_z. \tag{5.6}$$

Получим

$$\Delta\vec{u}=\frac{A}{\nu}\vec{e}_z. \tag{5.7}$$

Справедлива цепочка равенств

$$\big(\vec{u}\cdot\nabla\big)\big(\Delta\vec{u}\big)+\big(\Delta\vec{u}\cdot\nabla\big)\vec{u}=\frac{A}{\nu}\bigg(\Big(\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+u_z\frac{\partial}{\partial z}\Big)\vec{e}_z+\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}\bigg)=0. \tag{5.8}$$

Поскольку $\nu=const>0$ и

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=0, \tag{5.9}$$

условие (1.7) для поля (5.3) выполняется. По теореме 1 пара $\big(\vec{u}^{(2)},p^{(2)}\big)$ образует точное решение квазигидродинамической системы (1.8) – (1.15).

Чтобы построить из $\big(\vec{u}^{(1)},p^{(1)}\big)$ и $\big(\vec{u}^{(2)},p^{(2)}\big)$ новое решение квазигидродинамической системы, воспользуемся теоремой 8. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}
&\big[\vec{u}^{(1)}\times\vec{\omega}^{(2)}\big]+\big[\vec{u}^{(2)}\times\vec{\omega}^{(1)}\big]=\\
&=\bigg[\vec{u}^{(1)}\times\bigg(-\Big(\frac{A}{2\nu}r+\frac{B}{r}\Big)\vec{e}_\varphi+\omega_0\vec{e}_z\bigg)\bigg]+\lambda\big[\vec{u}^{(2)}\times\vec{u}^{(1)}\big]=\\
&=\bigg[\vec{u}^{(1)}\times\bigg(-\Big(\frac{A}{2\nu}r+\frac{B}{r}\Big)\vec{e}_\varphi+\omega_0\vec{e}_z-\lambda\vec{u}^{(2)}\bigg)\bigg]=\\
&=-A_0\lambda\bigg[\Big(J_1(\lambda r)\vec{e}_\varphi+J_0(\lambda r)\vec{e}_z\Big)\times\bigg(\Big(\frac{\omega_0}{2}r+\frac{\Gamma}{2\pi r}+\frac{A}{2\nu\lambda}r+\frac{B}{\lambda r}\Big)\vec{e}_\varphi+\\
&\quad+\Big(\frac{A}{4\nu}r^2+B\ln r+C-\frac{\omega_0}{\lambda}\Big)\vec{e}_z\bigg)\bigg]\exp(-\lambda^2\nu t)=\\
&=A_0\lambda\exp(-\lambda^2\nu t)\bigg(\Big(\frac{\omega_0}{2}r+\frac{\Gamma}{2\pi r}+\frac{A}{2\nu\lambda}r+\frac{B}{\lambda r}\Big)J_0(\lambda r)+\\
&\quad+\Big(\frac{\omega_0}{\lambda}-\frac{A}{4\nu}r^2-B\ln r-C\Big)J_1(\lambda r)\bigg)\vec{e}_r.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

При проведении выкладок были использованы свойства векторного произведения, равенство

$$\vec{\omega}^{(1)}=\lambda\vec{u}^{(1)}, \tag{5.11}$$

а также соотношения

$$\big[\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_\varphi\big]=0,\quad \big[\vec{e}_z\times\vec{e}_z\big]=0,\quad \big[\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_z\big]=-\big[\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi\big]=\vec{e}_r. \tag{5.12}$$

Заметим, что (5.10) можно представить в виде

$$\big[\vec{u}^{(1)}\times\vec{\omega}^{(2)}\big]+\big[\vec{u}^{(2)}\times\vec{\omega}^{(1)}\big]=\nabla\Xi, \tag{5.13}$$

где

$$\Xi=\Xi(r,t)=A_0\lambda\exp(-\lambda^2\nu t)\int\limits_{r_0}^{r}\bigg(\Big(\frac{\omega_0}{2}r_*+\frac{\Gamma}{2\pi r_*}+\frac{A}{2\nu\lambda}r_*+\frac{B}{\lambda r_*}\Big)J_0(\lambda r_*)+$$

$$+\Big(\frac{\omega_0}{\lambda}-\frac{A}{4\nu}r_*^2-B\ln r_*-C\Big)J_1(\lambda r_*)\Big)dr_*, \tag{5.14}$$

$$\nabla\Xi=\vec{e}_r\frac{\partial\Xi}{\partial r}. \tag{5.15}$$

Символом r_0 обозначено некоторое положительное число.

В силу сказанного выше, условие (4.17) легко может быть проверено. Таким образом, пара функций $(\vec{u},p)$, определяемая формулами (4.18), (4.19) является общим точным решением квазигидродинамической системы (1.8) – (1.15) и системы Навье–Стокса (1.17) – (1.20). Для квазигидродинамической системы оно заведомо является новым.

Пример 4. В качестве $\left(\vec{u}^{(1)},p^{(1)}\right)$ возьмем нестационарное однородно-винтовое решение системы Навье–Стокса (1.17) – (1.20) вида

$$\vec{u}^{(1)}=\vec{B}\exp(-\lambda^2\nu t), \tag{5.16}$$

$$p^{(1)}=C_1(t)-\frac{\vec{B}^2}{2}\exp(-2\lambda^2\nu t)=C_1(t)-\frac{\left(\vec{u}^{(1)}\right)^2}{2}. \tag{5.17}$$

Здесь $C_1(t)$ – некоторая непрерывная функция времени, $\vec{B}^2=(\vec{B}\cdot\vec{B})=|\vec{B}|^2$. Векторное поле $\vec{B}$ вычисляется по формуле (2.24). Для поля (5.16) выполнено условие

$$\vec{\omega}^{(1)}=\mathrm{rot}\ \vec{u}^{(1)}=\lambda\vec{u}^{(1)}, \tag{5.18}$$

где $\lambda=const>0$.

Возьмем еще одно стационарное решение $\left(\vec{u}^{(2)},p^{(2)}\right)$ указанной системы Навье–Стокса вида

$$\vec{u}^{(2)}=\lambda Ar\vec{e}_\varphi+2A\vec{e}_z, \tag{5.19}$$

$$p^{(2)}=\frac{\lambda^2A^2r^2}{2}+p_0. \tag{5.20}$$

Здесь A и p_0 – произвольные вещественные константы. Будем считать, что $A\neq 0$. Для обоих решений выполнено условие (1.7). Поэтому они являются также точными решениями квазигидродинамической системы. Принимая во внимание (5.19) и (2.25), находим

$$\vec{\omega}^{(2)}=\mathrm{rot}\ \vec{u}^{(2)}=2\lambda A\vec{e}_z. \tag{5.21}$$

Чтобы на основе $\left(\vec{u}^{(1)},p^{(1)}\right)$ и $\left(\vec{u}^{(2)},p^{(2)}\right)$ построить новое решение квазигидродинамической системы, вновь воспользуемся теоремой 8. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}&\big[\vec{u}^{(1)}\times\vec{\omega}^{(2)}\big]+\big[\vec{u}^{(2)}\times\vec{\omega}^{(1)}\big]=\big[\vec{u}^{(1)}\times\vec{\omega}^{(2)}\big]+\lambda\big[\vec{u}^{(2)}\times\vec{u}^{(1)}\big]=\\&=\big[\vec{u}^{(1)}\times\big(\vec{\omega}^{(2)}-\lambda\vec{u}^{(2)}\big)\big]=\big[\vec{u}^{(1)}\times\big(2\lambda A\vec{e}_z-\lambda(\lambda Ar\vec{e}_\varphi+2A\vec{e}_z)\big)\big]=-\lambda^2Ar\big[\vec{u}^{(1)}\times\vec{e}_\varphi\big]=\\&=-\lambda^2Ar\left[\left(-\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big)\vec{e}_r+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big)\vec{e}_z\right)\times\vec{e}_\varphi\right]\exp(-\lambda^2\nu t)=\\&=\lambda^2A\left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big)\vec{e}_r+\frac{\partial}{\partial z}\Big(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big)\vec{e}_z\right]\exp(-\lambda^2\nu t)=\nabla\Xi,\end{aligned} \tag{5.22}$$

где
$$\nabla\Xi = \nabla\Xi(r,z,t) = \lambda^2 Ar\frac{\partial\Phi}{\partial r}\exp(-\lambda^2\nu t). \tag{5.23}$$
При проведении вычислений были учтены формулы (2.24), (5.16), (5.18), (5.19), (5.21), а также соотношения
$$\big[\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_\varphi\big] = 0, \quad \big[\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi\big] = -\big[\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_r\big] = \vec{e}_z, \quad \big[\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_z\big] = -\big[\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi\big] = \vec{e}_r. \tag{5.24}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что условие (4.17) выполняется. Итак, пара функций $(\vec{u},p)$, определяемая формулами (4.18), (4.19) является новым точным решением квазигидродинамической системы (1.8) – (1.15).

Для системы Навье–Стокса (1.17) – (1.20) это решение впервые было найдено, причем другим способом, О.И.Богоявленским [11]. Запишем построенное решение в форме Богоявленского. Из (4.18), (5.16) и (5.19) находим
$$\vec{u} = \lambda Ar\vec{e}_\varphi + 2A\vec{e}_z + \vec{B}\exp(-\lambda^2\nu t). \tag{5.25}$$
С помощью формул (4.19), (5.17), (5.20), (5.16), (5.19), (5.23) и (4.18) определяем распределение давления
$$\begin{aligned}
p &= p^{(1)} + p^{(2)} - \big(\vec{u}^{(1)}\cdot\vec{u}^{(2)}\big) + \Xi = \\
&= C_1(t) - \frac{\big(\vec{u}^{(1)}\big)^2}{2} + \frac{\lambda^2A^2r^2}{2} + p_0 - \big(\vec{u}^{(1)}\cdot\vec{u}^{(2)}\big) + \lambda^2Ar\frac{\partial\Phi}{\partial r}\exp(-\lambda^2\nu t) = \\
&= C_1(t) - \frac{\big(\vec{u}^{(1)}\big)^2}{2} - \frac{\big(\vec{u}^{(2)}\big)^2}{2} + \lambda^2A^2r^2 + 2A^2 + p_0 - \\
&\quad - \big(\vec{u}^{(1)}\cdot\vec{u}^{(2)}\big) + \lambda^2A\psi\exp(-\lambda^2\nu t) = \\
&= C(t) + \lambda^2A^2r^2 + \lambda^2A\psi\exp(-\lambda^2\nu t) - \frac{\vec{u}^2}{2}.
\end{aligned} \tag{5.26}$$
Здесь
$$C(t) = C_1(t) + 2A^2 + p_0. \tag{5.27}$$
Функция ψ определяется по формуле (2.3) и удовлетворяет уравнению Грэда–Шафранова (2.2). В случае отсутствия внешних потенциальных сил и при $\nu = const > 0$ решение (5.25), (5.26) совпадает с полученным в [11].

Подчеркнем, что построенные в этом пункте точные решения квазигидродинамической системы не являются однородно-винтовыми. Однако они удовлетворяют обобщенному условию Громеки–Бельтрами
$$\mathrm{rot}\,\big[\vec{u}\times\vec{\omega}\big] = 0. \tag{5.28}$$

Заключение

Итак, некоторые известные методы построения точных решений классической системы Навье–Стокса могут быть надлежащим образом адаптированы для квазигидродинамической системы. Заметим, что существуют решения КГД системы, не удовлетворяющие уравнениям Навье–Стокса [16], [20]. Результаты, полученные в данной статье, подтверждают наличие глубоких связей между двумя рассматриваемыми системами.

В недавно опубликованной статье [21] показана возможность создания на основе КГД системы вычислительных алгоритмов расчета как ламинарных, так и турбулентных течений жидкости в трубе. Эти расчеты были выполнены на расположенном в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН вычислительном комплексе К–100. Возможность использования квазигидродинамических уравнений для моделирования ламинарно-турбулентного перехода может быть предметом дальнейших исследований.

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[3] Riley N., Drazin P.G. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 196 p.

[4] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.

[5] Страхович К.И. Механика вязкой жидкости. Ленинград: Издание Ленинградского гос. ун-та, 1940. 200 с.

[6] Caldonazzo B. Moti helicoidali, simmetrici ad un asse, di liquidi viscosi // Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend A. 1926. Vol. 59. Pp. 657–665.

[7] Mattei G. Sui moti di Beltrami-Caldonazzo in magnetofluidodinamica // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 1982. Vol. 68. Pp. 11–15.

[8] Bhatnagar P.L., Verma P.D. On superposable flows // Proceedings of the Indian Academy of Sciences. Section A. 1957. Vol. 45. Pp. 281–292.

[9] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.

[10] Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Applied Mechanics Reviews. 1989. Vol. 42, № 11. Part 2. Pp. S269–S282.

[11] Bogoyavlenskij O.I. New exact axisymmetric solutions to the Navier–Stokes equations // Zeitschrift Naturforschung A. 2020. Vol. 75, № 1. Pp. 29–42.

[12] Галкин В.А. Об одном классе точных решений системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в шаре и сферическом слое // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63, № 6. С. 1000–1005. https://doi.org/10.31857/S004446692306008X

[13] Галкин В.А. О структуре винтовых осесимметричных решений системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2024. Т. 64, № 5. С. 780–790. https://doi.org/10.31857/S0044466924050076

[14] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[15] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.

[16] Шеретов Ю.В. Двухскоростная негалилеева гидродинамика. Тверь: Тверской государственный университет, 2023. 196 с.

[17] Шеретов Ю.В. Кинетически согласованные уравнения газовой динамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2023. 129 с.

[18] Chandrasekhar S., Kendall P.C. On force-free magnetic fields // The Astrophysical Journal. 1957. Vol. 126, № 1. Pp. 1–5.

[19] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

[20] Шеретов Ю.В. Об одном способе построения точных решений квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 1. С. 14–32. https://doi.org/10.26456/vtpmk730

[21] Елизарова Т.Г., Кирюшина М.А. Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче о моделировании турбулентного течения в трубе // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2025. Т. 525. С. 62–70. https://doi.org/10.7868/S3034504925050097

Образец цитирования

Шеретов Ю.В. О построении точных решений квазигидродинамической системы в цилиндрических координатах с помощью принципа суперпозиции // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 1. С. 5–24. https://doi.org/10.26456/vtpmk770

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
профессор кафедры фундаментальной математики и цифровых технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

ON CONSTRUCTING EXACT SOLUTIONS OF THE QUASI–HYDRODYNAMIC SYSTEM IN CYLINDRICAL COORDINATES USING THE SUPERPOSITION PRINCIPLE

Sheretov Yu.V.
Tver State University, Tver

Received 21.01.2026, revised 10.02.2026.

This paper is devoted to finding new exact solutions to the quasi-hydrodynamic system for a weakly compressible viscous fluid in cylindrical coordinates. A combination of well-known results in the theory of the Navier–Stokes equations and the author's theorems allowed us to construct several homogeneously screwed solutions. Based on the superposition principle established by the author, were able to obtain solutions that are not screwed, but satisfy the generalized Gromeka–Beltrami condition. All the solutions of the quasi-hydrodynamic system are also exact solutions of the classical Navier–Stokes system in the dynamics of an incompressible viscous fluid.

Keywords: quasi-hydrodynamic system, Navier–Stokes system, exact solution, superposition principle.

Citation

Sheretov Yu.V., "On constructing exact solutions of the quasi-hydrodynamic system in cylindrical coordinates using the superposition principle", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2026, № 1, 5–24 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk770

References

[1] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[2] Landau L.D., Lifshits E.M., *Gidrodinamika [Hydrodynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 736 pp.

[3] Riley N., Drazin P.G., *The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 pp.

[4] Shmyglevskij Yu.D., *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti [Analytical Investigations of Gas and Fluid Dynamics]*, Editorial URSS Publ., Moscow, 1999 (in Russian), 232 pp.

[5] Strakhovich K.I., *Mekhanika vyazkoy zhidkosti [Mechanics of a viscous fluid]*, Izdanie Leningradskogo gos. un-ta, Leningrad, 1940 (in Russian), 200 pp.

[6] Caldonazzo B., "Moti helicoidali, simmetrici ad un asse, di liquidi viscosi", *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend A*, **59** (1926), 657–665.

[7] Mattei G., "Sui moti di Beltrami-Caldonazzo in magnetofluidodinamica", *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, **68** (1982), 11–15.

[8] Bhatnagar P.L., Verma P.D., "On superposable flows", *Proceedings of the Indian Academy of Sciences. Section A*, **45** (1957), 281–292.

[9] Pukhnachev V.V., "Symmetries in the Navier-Stokes equations", *Uspekhi mekhaniki [Achievements in Mechanics]*, 2006, № 1, 6–76 (in Russian).

[10] Wang C.Y., "Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations", *Applied Mechanics Reviews*, **42**:11, Part 2 (1989), S269–S282.

[11] Bogoyavlenskij O.I., "New exact axisymmetric solutions to the Navier–Stokes equations", *Zeitschrift Naturforschung A*, **75**:1 (2020), 29–42.

[12] Galkin V.A., "On a class of exact solutions of the Navier–Stokes system for an incompressible fluid in a ball and a spherical layer", *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of computational mathematics and mathematical physics]*, **63**:6 (2023), 1000–1005 (in Russian), https://doi.org/10.31857/S004446692306008X.

[13] Galkin V.A., "On the structure of helical axisymmetric solutions of the Navier–Stokes system for an incompressible fluid", *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]*, **64**:5 (2024), 780–790 (in Russian), https://doi.org/10.31857/S0044466924050076.

[14] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.

[15] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.

[16] Sheretov Yu.V., *Dvukhskorostnaya negalileeva gidrodinamika [Two-speed non-Galilean hydrodynamics]*, Tver State University, Tver, 2023 (in Russian), 196 pp.

[17] Sheretov Yu.V., *Kinetically consistent equations of gas dynamics*, Tver State University, Tver, 2023 (in Russian), 129 pp.

[18] Chandrasekhar S., Kendall P.C., "On force-free magnetic fields", *The Astrophysical Journal*, **126**:1 (1957), 1–5.

[19] Vladimirov V.S., *Uravneniya Matematicheskoi Fiziki [Equations of Mathematical Physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (in Russian), 512 pp.

[20] Sheretov Yu.V., "On a method for constructing exact solutions of a quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2025, № 1, 14–32 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk730.

[21] Elizarova T.G., Kiryushina M.A., "Regularized hydrodynamic equations in the problem of modeling turbulent flow in a pipe", *Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [RAS reports. Mathematics, computer science, management processes]*, **525** (2025), 62–70 (in Russian), https://doi.org/10.7868/S3034504925050097.

Author Info

1. **Sheretov Yurii Vladimirovich**
Professor of the Department of Fundamental Mathematics and Digital Technologies, Tver State University.

Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TverSU.
E-mail: *Sheretov.YV@tversu.ru*