

**ОБ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЗВУКА
НА АКУСТИЧЕСКИ МЯГКОМ ЦИЛИНДРЕ С УПРУГИМ
ПОКРЫТИЕМ, НЕОДНОРОДНЫМ ПО УГЛОВОЙ КООРДИНАТЕ**

Бирюков Д.Р.

Тульский государственный университет, г. Тула

Поступила в редакцию 04.12.2025, после переработки 22.01.2026.

Рассматривается падение плоской монохроматической звуковой волны на акустически мягкий цилиндр с покрытием в виде упругого цилиндрического слоя с плотностью и постоянными Ламе, значение которых зависит от угловой координаты. Отыскивается поле давления в рассеянной телом звуковой волне. Построена математическая модель рассматриваемого дифракционного процесса. Акустическое давление в жидкости, равное сумме давлений в первичном и рассеянном полях, является решением однородного уравнения Гельмгольца. Волновой процесс в неоднородном упругом покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды и законом Гука, дополненными граничными условиями. На внешней поверхности покрытия условия сводятся к равенству нормальных ускорений частиц со стороны жидкости и покрытия; равенству давления жидкости и нормального напряжения покрытия; отсутствию касательного напряжения. На внутренней поверхности покрытия условия сводятся к равенству нулю нормального и касательного напряжений. Также, рассеянная волна должна удовлетворять условию затухания на бесконечности. К уравнениям построенной модели применён метод разделения переменных по радиальной и угловой координатам. Компоненты вектора смещения, нормального и касательного напряжений, а также параметры материала в покрытии записываются в виде экспоненциальных рядов Фурье. Для определения коэффициентов в разложениях смещений и напряжений составлена краевая задача для бесконечной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Данная система, будучи усечённой, решается путём сведения к нескольким задачам Коши.

Ключевые слова: дифракция акустических волн, дифракция звука, цилиндр с покрытием, неоднородное покрытие, неоднородность в угловом направлении.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 1. С. 25–38.
<https://doi.org/10.26456/vtpmk771>

Введение

Исследование влияния характера неоднородности упругих тел на рассеяние ими звука – важное и актуальное направление в современной математической акустике. В общем случае, задачи дифракции для сложных типов неоднородности (когда плотность и характеристики зависят произвольным образом от координат точек тела) решаются с привлечением численных методов. К примеру, в работах [4, 11, 17] задачи рассеяния звука неоднородным цилиндрическим телом решаются с помощью метода конечных элементов. Особенности применения МКЭ при решениях задач дифракции описаны в работах [1-3].

Аналитическое решение в общем случае неоднородности упругого тела представляется весьма затруднительным. Однако, описание алгоритмов аналитических решений для различных частных случаев может быть использовано в дальнейшем для верификации решения задач дифракции программами, применяющими численные методы.

Большое количество работ посвящено аналитическим решениям задач дифракции звука упругими телами с радиально-неоднородными покрытиями. Метод решения задач такого типа описан в работе [16]. Различные частные случаи применения данного метода к решениям прямых задач дифракции описаны, к примеру, в [5, 12-15]. Решения прямых задач, полученные аналитическим способом, могут быть затем использованы для определения оптимальных законов неоднородности покрытий упругих тел: подобные обратные задачи рассматривались, например, в [6-7].

Аналитические решения для неоднородностей, не сводящихся к зависимости параметров материала от одной радиальной координаты, ранее почти не рассматривались. В данной работе описывается решение задачи рассеяния монохроматической звуковой волны акустически мягким цилиндром с покрытием, неоднородным по угловой координате. Другими словами, значения параметров материала зависят не от расстояния от центра цилиндра (как в вышеупомянутых работах), а от направления.

Приведём постановку задачи (Рис. 1). Рассматривается бесконечный круговой акустически мягкий цилиндр радиуса r_0 . С цилиндром связывается прямоугольная декартова система координат x, y, z таким образом, что ось Oz является осью цилиндра. Наряду с декартовой, используется цилиндрическая система координат r, φ, z такая, что $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Цилиндр имеет упругое неоднородное покрытие, внешний радиус которого равен r_1 . Параметры материала – плотность ρ и модули упругости λ, μ – являются непрерывными функциями координаты φ :

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) &= \frac{\rho_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\rho_m^{(a)} \cos(m\varphi) + \rho_m^{(b)} \sin(m\varphi) \right), \\ \lambda(\varphi) &= \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\lambda_m^{(a)} \cos(m\varphi) + \lambda_m^{(b)} \sin(m\varphi) \right), \\ G(\varphi) &= \frac{G_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(G_m^{(a)} \cos(m\varphi) + G_m^{(b)} \sin(m\varphi) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Цилиндр с покрытием окружён идеальной жидкостью с плотностью ρ_f и скоростью звука c , в которой распространяется плоская гармоническая звуковая волна давления [18] с круговой частотой ω :

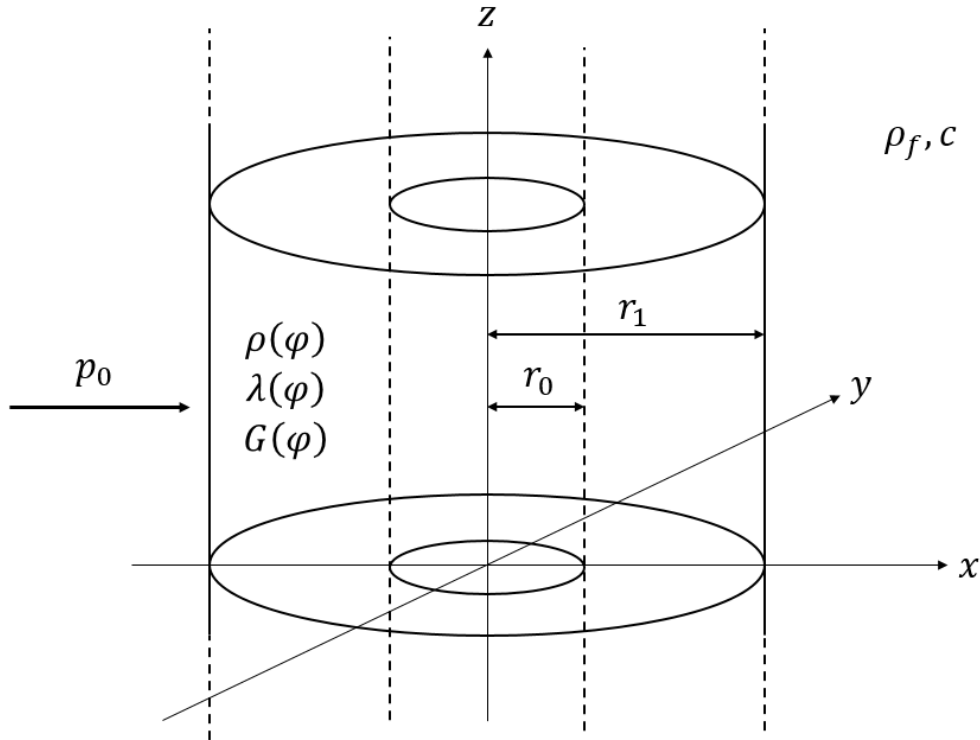


Рис. 1: Постановка задачи

$$p_0 = Ae^{i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)}, \tag{2}$$

где $\bar{k} = (k_x \cos \varphi_0, k_y \sin \varphi_0)$ – волновой вектор; \bar{r} – радиус-вектор; A – амплитуда, t – время.

В результате рассеяния p_0 на цилиндре с покрытием возникает новое волновое поле p . Требуется определить рассеянную волну $p_s = p - p_0$.

Из постановки рассматриваемой задачи следует, что она является осесимметричной: поля, определяющие движение в цилиндре с покрытием и жидкости, не зависят от вертикальной координаты z .

Временной множитель $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем будем опускать.

2. Математическая модель задачи

Как падающее p_0 , так и результирующее волновое поле p являются решениями однородного уравнения Гельмгольца [8, 18]. Рассеянное поле, являющееся их линейной комбинацией, также является решением данного уравнения:

$$\Delta p_s + k^2 p_s = 0. \tag{3}$$

С учётом условия излучения на бесконечности [18], решение p_s уравнения (3) может быть найдено в виде бесконечного ряда

$$p_s = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m H_m(kr) e^{im(\varphi-\varphi_0)}, \quad (4)$$

с неизвестными коэффициентами a_m . H_m – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка m ; $k = |\vec{k}| = \omega/c$ – волновое число.

Первичное волновое поле (2) также можно представить в виде бесконечного ряда, пользуясь теоремой сложения цилиндрических функций [18]:

$$p_0 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m J_m(kr) e^{im(\varphi-\varphi_0)}, \quad (5)$$

где $\gamma_m = Ai^m$; J_m – цилиндрическая функция Бесселя порядка m .

Движение частиц неоднородного покрытия цилиндра описывается общими уравнениями движения сплошной среды [9–10]. В случае осесимметричной задачи при распространении гармонических колебаний эти уравнения записываются в цилиндрической системе координат в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho \omega^2 u_r = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} + \rho \omega^2 u_\varphi = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где u_r, u_φ – компоненты вектора смещений частиц покрытия; $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора напряжений в покрытии.

Обобщённый закон Гука [9–10] позволяет выразить компоненты тензора напряжений σ через компоненты тензора деформаций ε . В свою очередь, компоненты ε выражаются через компоненты вектора смещений. Таким образом, можем выразить компоненты тензора σ , присутствующие в уравнениях (6), через u_r и u_φ :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = (\lambda + 2G) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\lambda + 2G}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_{r\varphi} = G \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) \right). \end{cases} \quad (7)$$

Уравнения (6)–(7) следует дополнить граничными условиями на поверхностях упругого неоднородного покрытия. Внешней поверхности, соприкасающейся с идеальной жидкостью, соответствует значение радиальной координаты $r = r_1$. Внутренней поверхности, соприкасающейся с акустически мягким цилиндром, соответствует $r = r_0$.

На внешней поверхности покрытия выполняются следующие условия: непрерывность нормальных ускорений частиц жидкости и покрытия; равенство нормального напряжения покрытия давлению жидкости; отсутствие касательного напряжения:

$$r = r_1 : \begin{cases} \omega^2 u_r = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \sigma_{rr} = -p, \\ \sigma_{r\varphi} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

На внутренней поверхности покрытия отсутствуют напряжения:

$$r = r_0 : \begin{cases} \sigma_{rr} = 0, \\ \sigma_{r\varphi} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

3. Разделение переменных

Вектор смещений и тензор напряжений представим в виде бесконечных экспоненциальных рядов Фурье:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{u}}_m(r) e^{im(\varphi-\varphi_0)}, \\ \sigma(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{\sigma}_m(r) e^{im(\varphi-\varphi_0)}. \end{cases} \quad (10)$$

Компоненты вектора $\hat{\mathbf{u}}_m(r)$ и тензора $\hat{\sigma}_m(r)$ обозначим следующим образом:

$$\hat{\mathbf{u}}_m(r) = \begin{pmatrix} \hat{u}_{rm}(r) \\ \hat{u}_{\varphi m}(r) \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_m(r) = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{rrm}(r) & \hat{\sigma}_{r\varphi m}(r) \\ \hat{\sigma}_{r\varphi m}(r) & \hat{\sigma}_{\varphi\varphi m}(r) \end{pmatrix}.$$

Аналогично, в виде рядов Фурье представим параметры материала покрытия:

$$\begin{cases} \rho(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}_m e^{im(\varphi-\varphi_0)}, \\ \lambda(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{\lambda}_m e^{im(\varphi-\varphi_0)}, \\ G(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{G}_m e^{im(\varphi-\varphi_0)}. \end{cases} \quad (11)$$

Коэффициенты $\hat{\rho}_m$, $\hat{\lambda}_m$, \hat{G}_m могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \frac{\beta_0 e^{im\varphi_0}}{2}, \\ \hat{\beta}_m = \frac{(\beta_m^{(a)} - i\beta_m^{(b)}) e^{im\varphi_0}}{2}, & m > 0, \\ \hat{\beta}_m = \frac{(\beta_{|m|}^{(a)} + i\beta_{|m|}^{(b)}) e^{im\varphi_0}}{2}, & m < 0, \end{cases}$$

где β – любой из параметров материала ρ , λ , G .

Подставляя (10)-(11) в (7) и пользуясь ортогональностью экспонент $e^{im(\varphi-\varphi_0)}$, получим уравнения относительно неизвестных коэффициентов рядов Фурье для каждого целого m :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{rrm} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[(\hat{\lambda}_q + 2\hat{G}_q) \hat{u}'_{rn} + \frac{\hat{\lambda}_q}{r} (\hat{u}_{rn} + in\hat{u}_{\varphi n}) \right], \\ \hat{\sigma}_{\varphi\varphi m} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\hat{\lambda}_q \hat{u}'_{rn} + \frac{\hat{\lambda}_q + 2\hat{G}_q}{r} (\hat{u}_{rn} + in\hat{u}_{\varphi n}) \right], \\ \hat{\sigma}_{r\varphi m} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{G}_q \left[\hat{u}'_{\varphi n} + \frac{in\hat{u}_{rn} - \hat{u}_{\varphi n}}{r} \right]. \end{cases} \quad (12)$$

Индекс q , введённый в (12) и применяемый далее, используется для сокращения записи разности $q = q(m, n) = m - n$. Верхним штрихом обозначается дифференцирование по r . Подставляя (10)-(11) в уравнения движения (6), получим для каждого целого m :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}'_{rrm} + \frac{im\hat{\sigma}_{r\varphi m} + \hat{\sigma}_{rrm} - \hat{\sigma}_{\varphi\varphi m}}{r} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}_q \omega^2 \hat{u}_{rn} = 0, \\ \hat{\sigma}'_{r\varphi m} + \frac{2\hat{\sigma}_{r\varphi m} + im\hat{\sigma}_{\varphi\varphi m}}{r} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}_q \omega^2 \hat{u}_{\varphi n} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Исключим из уравнений (13) функцию $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi m}$, подставив в них вторую формулу (12). Тогда для каждого целого m будет верно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}'_{rrm} + \frac{\hat{\sigma}_{rrm} + im\hat{\sigma}_{r\varphi m}}{r} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\hat{\rho}_q \omega^2 \hat{u}_{rn} - \\ - \frac{(\hat{\lambda}_q + 2\hat{G}_q)(\hat{u}_{rn} + in\hat{u}_{\varphi n})}{r^2} - \frac{\hat{\lambda}_q}{r} \hat{u}'_{rn}] = 0, \\ \hat{\sigma}'_{r\varphi m} + \frac{2\hat{\sigma}_{r\varphi m}}{r} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\hat{\rho}_q \omega^2 \hat{u}_{\varphi n} + \\ + \frac{m(\hat{\lambda}_q + 2\hat{G}_q)(i\hat{u}_{rn} - n\hat{u}_{\varphi n})}{r^2} + \frac{im\hat{\lambda}_q}{r} \hat{u}'_{rn}] = 0. \end{array} \right. \quad (14)$$

Первое и третье уравнения (12), а также уравнения (14) можно записать вместе в матричном виде для каждого целого m :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [A_{mn} \mathbf{U}'_n + B_{mn} \mathbf{U}_n] = 0, \quad (15)$$

где:

$$\mathbf{U}_n = (\hat{\sigma}_{rrn} \quad \hat{\sigma}_{r\varphi n} \quad \hat{u}_{rn} \quad \hat{u}_{\varphi n})^T,$$

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} \delta_q & 0 & -\frac{\hat{\lambda}_q}{r} & 0 \\ 0 & \delta_q & \frac{im\hat{\lambda}_q}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_q + 2\hat{G}_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{G}_q \end{pmatrix},$$

$$B_{mn} = \begin{pmatrix} \frac{\delta_q}{r} & \frac{im\delta_q}{r} & \rho_q \omega^2 - \frac{\hat{\lambda}_q + 2\hat{G}_q}{r^2} & -\frac{in(\hat{\lambda}_q + 2\hat{G}_q)}{r^2} \\ 0 & \frac{2\delta_q}{r} & \frac{im(\hat{\lambda}_q + 2\hat{G}_q)}{r^2} & \rho_q \omega^2 - \frac{mn(\hat{\lambda}_q + 2\hat{G}_q)}{r^2} \\ -\delta_q & 0 & \frac{\hat{\lambda}_q}{r} & \frac{in\hat{\lambda}_q}{r} \\ 0 & -\delta_q & \frac{in\hat{G}_q}{r} & -\frac{\hat{G}_q}{r} \end{pmatrix},$$

$$\delta_q = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Подставим (10)-(11) в первое граничное условие (8):

$$r = r_1 : \rho_f \omega^2 \hat{u}_{rm}(r_1) = k \left(\gamma_m J'_m(kr_1) + a_m H'_m(kr_1) \right). \quad (16)$$

Выражая a_m из (16), получим формулу для коэффициентов рассеянной волны:

$$a_m = \frac{\rho_f \omega^2 \hat{u}_{rm}(r_1) - k \gamma_m J'_m(kr_1)}{k H'_m(kr_1)}. \quad (17)$$

Подставим (10)-(11), (17) во второе и третье граничные условия (8):

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_{rrm}(r_1) + \gamma_m J_m(kr_1) + \left(\rho_f \omega^2 \hat{u}_{rm}(r_1) - k \gamma_m J'_m(kr_1) \right) \frac{H_m(kr_1)}{k H'_m(kr_1)} = 0, \\ \hat{\sigma}_{r\varphi m}(r_1) = 0. \end{array} \right. \quad (18)$$

Подставляя (10)-(11) в (9), получим:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{rrm}(r_0) = 0, \\ \hat{\sigma}_{r\varphi m}(r_0) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Запишем краевые условия (18)-(19) в матричном виде:

$$\begin{cases} C_m \mathbf{U}_m(r_1) = \mathbf{Q}_m, \\ D_m \mathbf{U}_m(r_0) = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где:

$$C_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\rho_f \omega^2 H_m(kr_1)}{k H'_m(kr_1)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_m = \begin{pmatrix} \gamma_m \left(\frac{J'_m(kr_1) H_m(kr_1)}{H'_m(kr_1)} - J_m(kr_1) \right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Решение усечённой краевой задачи

Решение краевой задачи (15), (20) для бесконечного числа дифференциальных уравнений (соответствующих $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) относительно бесконечного числа неизвестных \mathbf{U}_m позволяет определить значения $\hat{u}_{rm}(r_1)$. Подставляя эти значения в формулы (4), (17), находим рассеянную волну p_s .

Ввиду того, что решаемая система обыкновенных дифференциальных уравнений является бесконечной, её приближённое решение ищем методом усечения. Выберем некоторое натуральное M и приближённо заменим бесконечные ряды Фурье (10)-(11) их конечными аналогами:

$$f = \sum_{m=-M}^M \hat{f}_m e^{im(\varphi - \varphi_0)}. \quad (21)$$

Здесь f – любая из функций $u_r, u_\varphi, \sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi\varphi}, \rho, \lambda, G$; \hat{f}_m – соответствующий f m -ый коэффициент ряда Фурье. Таким образом, каждая из компонент смещений, напряжений и каждый параметр материала в усечённой версии задачи определяется $2M + 1$ коэффициентами Фурье.

Для каждой из вышеперечисленных величин f будем, ввиду представления (21), считать $\hat{f}_m(r) \equiv 0$ при $|m| > M$. Таким образом, решаемая краевая задача состоит из следующих уравнений, записанных для $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$, и краевых условий:

$$\tilde{A}_m \mathbf{V}' + \tilde{B}_m \mathbf{V} = 0, \quad (22)$$

$$\tilde{C} \mathbf{V}(r_1) = \tilde{\mathbf{Q}}, \quad (23)$$

$$\tilde{D}\mathbf{V}(r_0) = 0, \quad (24)$$

где

$$\tilde{A}_m = (A_{m(-M)}, \dots, A_{m(-1)}, A_{m0}, A_{m1}, \dots, A_{mM}),$$

$$\tilde{B}_m = (B_{m(-M)}, \dots, B_{m(-1)}, B_{m0}, B_{m1}, \dots, B_{mM}),$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{U}_{-M}, \dots, \mathbf{U}_{-1}, \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_M)^T,$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{-M} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C_M \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_{-M} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_M \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = (\mathbf{Q}_{-M}, \dots, \mathbf{Q}_{-1}, \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_M)^T.$$

Краевая задача (22)-(24) может быть сведена к задачам с начальными условиями в точке $r = r_0$ [8]. Решение \mathbf{V} задачи (22)-(24) есть линейная комбинация решений задач Коши для уравнений (22) с линейно независимыми начальными условиями. Обозначим $\mathbf{V}^{(n,1)}$ решение задачи Коши для уравнений (22) с начальными условиями

$$\hat{u}_{\Gamma m}(r_0) = \begin{cases} 1, m = n, \\ 0, m \neq n, \end{cases} \quad \hat{\sigma}_{\Gamma m}(r_0) = 0, \quad \hat{\sigma}_{\Gamma \varphi m}(r_0) = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M. \quad (25)$$

Соответственно, $\mathbf{V}^{(n,2)}$ – решение задачи Коши для (22) с начальными условиями

$$\hat{u}_{\Gamma m}(r_0) = 0, \quad \hat{u}_{\varphi m}(r_0) = \begin{cases} 1, m = n, \\ 0, m \neq n, \end{cases} \quad \hat{\sigma}_{\Gamma m}(r_0) = 0, \quad \hat{\sigma}_{\Gamma \varphi m}(r_0) = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M. \quad (26)$$

Задачи Коши (22)-(25) и (22)-(24), (26) могут быть решены любым удобным численным методом, к примеру, методом Рунге-Кутты четвёртого порядка точности.

Решение \mathbf{V} задачи (22)-(24) есть линейная комбинация вида

$$\mathbf{V} = \sum_{n=-M}^M (\alpha_n \mathbf{V}^{(n,1)} + \beta_n \mathbf{V}^{(n,2)}), \quad (27)$$

автоматически удовлетворяющая системе уравнений (22) и краевому условию (24). Коэффициенты α_m, β_m (для каждого целого m) суммы (27) находятся из условия (23):

$$\begin{pmatrix} C_{-M} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & C_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & C_M \end{pmatrix} \times \times \sum_{n=-M}^M \begin{pmatrix} \alpha_n \mathbf{U}_{-M}^{(n,1)} + \beta_n \mathbf{U}_{-M}^{(n,2)} \\ \dots \\ \alpha_n \mathbf{U}_0^{(n,1)} + \beta_n \mathbf{U}_0^{(n,2)} \\ \alpha_n \mathbf{U}_1^{(n,1)} + \beta_n \mathbf{U}_1^{(n,2)} \\ \dots \\ \alpha_n \mathbf{U}_M^{(n,1)} + \beta_n \mathbf{U}_M^{(n,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{-M} \\ \dots \\ \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \dots \\ \mathbf{Q}_M \end{pmatrix}, \tag{28}$$

Здесь $\mathbf{U}_m^{(n,j)}$ – составляющие решения задачи Коши

$$\mathbf{V}^{(n,j)} = \left(\mathbf{U}_{-M}^{(n,j)}, \dots, \mathbf{U}_{-1}^{(n,j)}, \mathbf{U}_0^{(n,j)}, \mathbf{U}_1^{(n,j)}, \dots, \mathbf{U}_M^{(n,j)} \right)^T.$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (28) относительно неизвестных α_m, β_m позволяет отыскать решение краевой задачи по формуле (27). И, как следствие, определить рассеянную волну (4), (17).

Заключение

В работе описан алгоритм аналитического решения задачи, позволяющий определить волну, рассеянную акустически мягким цилиндром с покрытием, неоднородным по угловой координате. Данный алгоритм может быть обобщён на случай покрытия, неоднородного по двум пространственным координатам, и цилиндрического ядра более сложного типа. Полученные аналитические решения могут быть в дальнейшем использованы для верификации результатов расчётов программ, решающих аналогичные задачи численными методами.

Список литературы

[1] Бирюков Д.Р. Исследование влияния параметров метода конечных элементов на моделирование дифракции // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXII Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня рождения академика А.Н. Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете. Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023. С. 349–352.

[2] Бирюков Д.Р. Алгоритм исследования гармонических колебаний в идеальной жидкости с абсолютно твёрдыми включениями с помощью метода конечных элементов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 2. С. 37–50. <https://doi.org/10.26456/vtpmk689>

- [3] Бирюков Д.Р. Особенности построения глобальной матрицы жёсткости при использовании метода конечных элементов для решения задач дифракции акустических волн // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. С. 1248–1253.
- [4] Иванов В.И., Скобельцын С.А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. № 2. С. 132–145.
- [5] Ларин Н.В. Дифракция цилиндрических звуковых волн на неоднородной трансверсально-изотропной термоупругой цилиндрической оболочке // Вестник Тульского государственного университета. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2007. № 1. С. 58–64.
- [6] Ларин Н.В., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 4. С. 54–62.
- [7] Ларин Н.В., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акустический журнал. 2015. Т. 61, № 5. ID 552.
- [8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. 736 с.
- [9] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [10] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
- [11] Скобельцын С.А. Решение задачи о рассеянии плоской звуковой волны неоднородным упругим цилиндром с помощью МКЭ // Матер. междунар. научн. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. С. 298–300.
- [12] Родионова Г.А., Толоконников Л.А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 131–137.
- [13] Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75, № 5. С. 850–857.
- [14] Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. № 3. С. 202–208.

- [15] Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. № 2. С. 265–274.
- [16] Толоконников Л.А., Скобельцын С.А., Ларин Н.В. О методе решения задач дифракции звуковых волн на упругих телах с неоднородными покрытиями // Матер. междунар. научн. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ, 2009. С. 477–480.
- [17] Пешков Н.Ю., Скобельцын С.А. Рассеяние звука упругим цилиндром с кусочно-непрерывным неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2020. № 10. С. 214–226.
- [18] Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.

Образец цитирования

Бирюков Д.Р. Об алгоритме решения задачи дифракции звука на акустически мягком цилиндре с упругим покрытием, неоднородным по угловой координате // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 1. С. 25–38. <https://doi.org/10.26456/vtprmk771>

Сведения об авторах

1. Бирюков Данила Русланович

аспирант кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета.

Россия, 300012, г. Тула, проспект Ленина, 95, ТулГУ.

E-mail: danilabirukov@rambler.ru

ON AN ALGORITHM FOR SOLVING THE PROBLEM OF SOUND DIFFRACTION ON AN ACOUSTICALLY SOFT CYLINDER WITH AN ELASTIC COATING THAT IS NON-UNIFORM IN ANGULAR COORDINATE

Biryukov D.R.

Tula State University, Tula

Received 04.12.2025, revised 22.01.2026.

The incidence of a plane monochromatic sound wave on an acoustically soft cylinder coated with an elastic cylindrical layer with density and Lamé constants, the value of which depends on the angular coordinate, is considered. The pressure field in the sound wave scattered by the body is determined. A mathematical model of the diffraction process under consideration is constructed. The acoustic pressure in the liquid, equal to the sum of the pressures in the primary and scattered fields, is a solution to the homogeneous Helmholtz equation. The wave process in an inhomogeneous elastic coating is described by the general equations of motion of a continuous medium and Hooke's law, supplemented by boundary conditions. On the outer surface of the coating, the conditions reduce to equality of the normal particle accelerations from the liquid and coating; equality of the liquid pressure and the normal stress of the coating; and the absence of shear stress. On the inner surface of the coating, the conditions reduce to zero normal and shear stresses. Furthermore, the scattered wave must satisfy the attenuation condition at infinity. The method of separating variables by radial and angular coordinates was applied to the equations of the constructed model. The components of the displacement vector, normal and shear stresses, and the material parameters in the coating are written as exponential Fourier series. To determine the coefficients in the expansions of displacements and stresses, a boundary value problem for an infinite system of first-order linear ordinary differential equations was constructed. This system, when truncated, is solved by reducing it to several Cauchy problems.

Keywords: acoustic wave diffraction, sound diffraction, coated cylinder, non-uniform coating, non-uniformity in angular direction.

Citation

Biryukov D.R., "On an algorithm for solving the problem of sound diffraction on an acoustically soft cylinder with an elastic coating that is non-uniform in angular coordinate", *Vestnik TsvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2026, № 1, 25–38 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk771>

References

- [1] Biryukov D.R., “Study of the influence of finite element method parameters on the modeling of acoustic wave diffraction”, *Algebra, Number Theory, Discrete Geometry and Multiscale Modeling: Modern Problems, Applications and Problems of History: Proceedings of the XXII International Conference Dedicated to the 120th Anniversary of Academician A. Kolmogorov and the 60th Anniversary of School No. 18 at Moscow University*, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula, 2023, 349–352 (in Russian).
- [2] Biryukov D.R., “Algorithm for studying harmonic oscillations in an ideal fluid with absolutely rigid inclusions using the finite element method”, *Vestnik TvgU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 2, 37–50 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtpmk689>.
- [3] Biryukov D.R., “Features of constructing the global stiffness matrix when using the finite element method for solving problems of acoustic wave diffraction”, *Actual Problems of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics: Proceedings of the International Scientific Conference*, Publishing House ”Scientific Research Publications”, Voronezh, 2024, 1248–1253 (in Russian).
- [4] Ivanov V.I., Skobeltsyn S.A., “Modeling of solutions to acoustics problems using FEM”, *Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki [Proceedings of Tula State University. Natural Sciences]*, 2008, № 2, 132–145 (in Russian).
- [5] Larin N.V., “Diffraction of cylindrical sound waves by an inhomogeneous transversely isotropic thermoelastic cylindrical shell”, *Vestnik Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Differentsialnye uravneniya i prikladnye zadachi [Bulletin of Tula State University. Series: Differential Equations and Applied Problems]*, 2007, № 1, 58–64 (in Russian).
- [6] Larin N.V., Skobeltsyn S.A., Tolokonnikov L.A., “On determining linear inhomogeneity laws of a cylindrical elastic layer with the least reflection in a given direction during sound scattering”, *Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki [Proceedings of Tula State University. Natural Sciences]*, 2014, № 4, 54–62 (in Russian).
- [7] Larin N.V., Skobeltsyn S.A., Tolokonnikov L.A., “Determination of inhomogeneity laws of a flat elastic layer with given sound-reflecting properties”, *Akusticheskij zhurnal [Acoustical Physics]*, **61**:5 (2015), 552 (in Russian).
- [8] Landau L.D., Lifshitz E.M., *Fluid Mechanics*, 2nd ed., Butterworth–Heinemann, Waltham, Massachusetts, 1986, 736 pp.
- [9] Novatskij V., *Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]*, Mir Publ., Moscow, 1975 (in Russian), 872 pp.
- [10] Sedov L.I., *Mechanics of Continuous Media. V.1*, World Scientific Publishing Company, New Jersey, 1997, 528 pp.

- [11] Skobeltsyn S.A., “Solution of the problem of scattering of a plane sound wave by an inhomogeneous elastic cylinder using FEM”, *Mater. mezhdunar. nauchn. konf. "Sovremennyye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki" [Proc. of the Int. Sci. Conf. "Modern Problems of Mathematics, Mechanics, Informatics"]*, Tula State University Publishing House, Tula, 2008, 298–300 (in Russian).
- [12] Rodionova G.A., Tolokonnikov L.A., “Diffraction of a spherical sound wave by an elastic sphere with an inhomogeneous coating”, *Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennyye nauki [Proceedings of Tula State University. Natural Sciences]*, 2014, № 3, 131–137 (in Russian).
- [13] Romanov A.G., Tolokonnikov L.A., “Scattering of sound waves by a cylinder with an inhomogeneous elastic coating”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, **75**:5 (2011), 850–857 (in Russian).
- [14] Tolokonnikov L.A., “Diffraction of cylindrical sound waves by a cylinder with an inhomogeneous elastic coating”, *Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennyye nauki [Proceedings of Tula State University. Natural Sciences]*, 2013, № 3, 202–208 (in Russian).
- [15] Tolokonnikov L.A., “Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with an inhomogeneous coating”, *Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennyye nauki [Proceedings of Tula State University. Natural Sciences]*, 2013, № 2, 265–274 (in Russian).
- [16] Tolokonnikov L.A., Skobeltsyn S.A., Larin N.V., “On a method for solving problems of diffraction of sound waves by elastic bodies with inhomogeneous coatings”, *Mater. mezhdunar. nauchn. konf. "Sovremennyye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki" [Proc. of the Int. Sci. Conf. "Modern Problems of Mathematics, Mechanics, Informatics"]*, Tula State University Publishing House, Tula, 2009, 477–480 (in Russian).
- [17] Peshkov N.Yu., Skobeltsyn S.A., “Sound scattering by an elastic cylinder with a piecewise continuous inhomogeneous coating”, *Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki [Proceedings of Tula State University. Technical Sciences]*, 2020, № 10, 214–226 (in Russian).
- [18] Shenderov E.L., *Volnovyye zadachi gidroakustiki [Wave problems of hydroacoustics]*, Sudostroenie, Leningrad, 1972 (in Russian), 348 pp.

Author Info

1. **Biryukov Danila Ruslanovich**

Postgraduate student at the Department of Applied Mathematics and Informatics, Tula State University.

Russia, 300012, Tula, Prospekt Lenina, 95, Tula State University.

E-mail: danilabirukov@rambler.ru