ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 519.2

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОТЕРЬ СТРАХОВЫХ КОМПАНИЙ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ЧИСЛЕ КЛИЕНТОВ: МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Арифуллин А.И., Бенинг В.Е.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 03.10.2025, после переработки 27.11.2025.

В работе рассмотрено асимптотическое поведение максимальной порядковой статистики в случае распределения Бёрра [6]. Проведено асимптотическое сравнение деятельности страховых организаций, рассматривающих максимальные потери в качестве общих потерь. Деятельность таких организаций оценивается в терминах асимптотического дефекта. Рассмотрен случай, когда число клиентов страховой компании случайно. В качестве примеров рассматриваются распределение Делапорта, усечённые биномиальное распределение и распределение Пуассона, описывающие число случайных факторов (или клиентов), приводящих к потерям.

Ключевые слова: резерв страховой компании, выборка случайного объёма, распределение Бёрра, распределение Делапорта, асимптотические разложения, усечённые биномиальное распределение и распределение Пуассона, максимальная порядковая статистика, асимптотический дефект.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 1. С. 39–59.
https://doi.org/10.26456/vtpmk772

Введение

Под *организацией, подверженной риску*, в дальнейшем будем понимать страховую компанию (фирму), а под *факторами риска* — её клиентов, страхующих свои потери. В аналогичном контексте, например, можно рассматривать страховую компанию, которая занимается компенсацией потерь в случае гибели людей в авиакатастрофах или пострадавших от наводнений. Факторами риска в этом случае являются погибшие или пострадавшие, чьи потери страхуются. Рассмотрим базовую модель страхования, в которой на протяжении различных отчётных периодов одинаковой длины (например, месяцев или лет) происходит случайное число страховых событий (выплаты по страховым случаям или заключения страховых контрактов). Подобные ситуации наблюдаются, например, при страховании от авиакатастроф, где число погибших в авариях может варьироваться от года к году, или при страховании от наводнений в США, когда количество пострадавших от наводнений может существенно колебаться в разные климатические периоды. В таких случаях число клиентов страховой компании заранее неизвестно, и его можно разумно трактовать как случайную величину. Таким образом, естественным становится исследование *асимптотического поведения деятельности страховой компании*, когда число клиентов случайно. Это направление было разработано в работах [1–5].

В работе [6] рассмотрено распределение Бёрра с функцией распределения

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x^r)^\gamma}, \qquad x > 0,\, r > 0,\, \gamma > 0. \tag{1}$$

Параметры r и γ определяют скорость убывания «хвостов» распределения, что может приводить к значительным рискам при их малых значениях. При малых r и γ у распределения Бёрра отсутствуют высокие моменты и плотность. Это распределение было использовано в разделе 6 работы [6], а также в исследовании [7] и рассмотрено в книге [8], с. 242.

Для данного распределения в контексте статьи изучается асимптотическое поведение необходимого резерва страховой компании как для детерминированного, так и для случайного числа клиентов. Результаты подобного рода можно найти в работах [9–14]. В этих работах представлены асимптотические разложения необходимого резерва страховой компании, а также проведено сравнение деятельности различных страховых компаний через призму необходимого добавочного числа клиентов (асимптотического дефекта).

Работа [22] исследует применение распределения Бёрра в асимптотическом анализе поведения резерва страховой компании и предоставляет дополнительные результаты, связанные с анализом добавочного числа клиентов, необходимого для поддержания резервов страховой компании в различных ситуациях. В данной работе также рассмотрены два примера, иллюстрирующие эти результаты: первый — для максимальных потерь, второй — для усечённого биномиального распределения и распределения Пуассона.

В разделе 1 рассматривается асимптотика максимальных потерь и α-резерва, где представлены теоретические разложения и асимптотические оценки для различных моделей распределений. В разделе 2 представлены теоретические результаты для усечённых распределений Делапорта и обобщённого пуассоновского распределения применительно к случайному числу клиентов. Раздел 3 содержит эмпирическую оценку применимости различных распределений, где рассмотрены реальные данные о погибших в авиакатастрофах и пострадавших от наводнений в США, проведена подгонка моделей для этих данных и сделаны выводы о их применимости.

1. Асимптотика максимальных потерь и α-резерва

В этом разделе собраны только формулировки результатов, используемых далее; доказательства и подробные выводы опущены и отсылаются к работе [22].

Ниже $F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x^r)^\gamma}$, $x > 0$, $r > 0$, $\gamma > 0$ — функция распределения Бёрра, $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределённые с.в. с функцией распределения F, $X_{(n)} = \max_{1\le i\le n} X_i$, и

$$S_n = n^{-\frac{1}{r\gamma}} X_{(n)}.$$

Теорема 1. *(Теорема о разложении α-резерва для гладких аппроксимаций распределения статистики). Пусть равномерно по $x \in \mathbb{R}$ для функции распределения S_n справедливо*

$$P(S_n < x) = G^*(x) + \frac{1}{n^\beta} g_1^*(x) + \frac{1}{n^{2\beta}} g_2^*(x) + o(n^{-2\beta}), \quad \beta > 0,$$

где G^*, g_1^*, g_2^* достаточно гладкие. Тогда для α-резерва $c_\alpha^*(n)$ выполнено разложение

$$c_\alpha^*(n) = c_\alpha^* - \frac{g_1^*(c_\alpha^*)}{n^\beta G^{*\prime}(c_\alpha^*)} - \frac{1}{n^{2\beta}} \left(\frac{G^{*\prime\prime}(c_\alpha^*) g_1^{*2}(c_\alpha^*)}{2(G^{*\prime}(c_\alpha^*))^3} + \frac{G^{*\prime}(c_\alpha^*) g_2^*(c_\alpha^*) - g_1^*(c_\alpha^*) g_1^{*\prime}(c_\alpha^*)}{(G^{*\prime}(c_\alpha^*))^2} \right) + o(n^{-2\beta}),$$

где c_α^* удовлетворяет $G^*(c_\alpha^*) = 1 - \alpha$.

Теорема 2. *(Асимптотика распределения нормированной максимальной потери). Пусть X_i имеют распределение Бёрра. Тогда для $\bar{F}_n(x) := P(S_n < (x - n^{-1/\gamma})^{1/r})$ при $x > \theta > 0$:*

$$\left| \bar{F}_n(x) - e^{-1/x^\gamma} + \frac{e^{-1/x^\gamma}}{2nx^{2\gamma}} + \frac{e^{-1/x^\gamma}}{n^2 x^{3\gamma}} \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^\gamma} \Big) \right| \le C(\theta) \frac{e^{-1/x^\gamma}}{n^3 h(x)},$$

где $C(\theta) > 0$ и

$$h(x) = \begin{cases} x^{4\gamma}, & x > 1, \\ x^{8\gamma}, & 0 < \theta \le x < 1. \end{cases}$$

Следствие 1. *Если $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, то для $F_n(x) = P(S_n < x) = \bar{F}_n((x + n^{-1/\gamma})^r)$ при $x > \theta > 0$*

$$\left| F_n(x) - e^{-1/x^{r\gamma}} + \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}}{2nx^{2r\gamma}} + \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}}{n^2 x^{3r\gamma}} \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{r\gamma}} \Big) \right| \le C(\theta) \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}}{n^{\min(1/\gamma, 3)} h_1(x)},$$

где

$$h_1(x) = \begin{cases} x^{4r\gamma}, & x > 1, \\ x^{8r\gamma}, & 0 < \theta \le x < 1. \end{cases}$$

Следствие 2. *Если $\gamma = \frac{1}{2}$, то при $x > \theta > 0$*

$$\left| F_n(x) - e^{-1/x^{r/2}} + \frac{e^{-1/x^{r/2}}}{2nx^r} + \frac{e^{-1/x^{r/2}}}{n^2 x^{3r/2}} \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{r/2}} - \frac{r}{2x^{1-r}} \Big) \right| \le C(\theta) \frac{e^{-1/x^{r/2}}}{n^3 h_2(x)},$$

где

$$h_2(x) = \begin{cases} x^{\min(2r, 2+r)}, & x > 1, \\ x^{\max(4r, 2+r)}, & 0 < \theta \le x < 1. \end{cases}$$

Теорема 3. *(Разложения α-резерва $c^*_\alpha(n)$).*

1. *При условиях следствия 1:*

$$c^*_\alpha(n) = v_\alpha + \frac{v_1(\alpha)}{n} + \frac{v_2(\alpha)}{n^2} + o(n^{-2}),$$

где $l(\alpha) = -\log(1-\alpha)$,

$$v_\alpha = l^{-1/r\gamma}(\alpha), \quad v_1(\alpha) = \frac{1}{r\gamma}\, l^{(1-r\gamma)/r\gamma}(\alpha),$$

$$v_2(\alpha) = \frac{l^{(2r\gamma-1)/r\gamma}(\alpha)}{r\gamma}\left[\left(\frac{1}{r\gamma} + \frac{17}{6}\right) + \frac{15}{8} l(\alpha)\right].$$

2. *При условиях следствия 2:*

$$c^*_\alpha(n) = \bar{v}_\alpha + \frac{\bar{v}_1(\alpha)}{n} + \frac{\bar{v}_2(\alpha)}{n^2} + o(n^{-2}),$$

где $l(\alpha) = -\log(1-\alpha)$,

$$\bar{v}_\alpha = l^{-2/r}(\alpha), \quad \bar{v}_1(\alpha) = \frac{2}{r}\, l^{(2-r)/r}(\alpha),$$

$$\bar{v}_2(\alpha) = \frac{2l^{(2r-2)/r}(\alpha)}{r}\left[\left(\frac{2}{r} + \frac{17}{6}\right) + \frac{15}{8} l(\alpha)\right] - 1.$$

1.1. Вторая компания и сравнение резервов

Пусть Y_i независимы, одинаково распределены с

$$G_n(x) = P(Y_1 < x) = F(x - \theta_n), \qquad \theta_n = \frac{f}{n^2} + o(n^{-2}), \quad x - \theta_n > 0,$$

и $T_n = n^{-1/(r\gamma)} Y_{(n)}$.

Теорема 4. *(Асимптотика распределения T_n).*

1. *Если* $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, *то*

$$P(T_n < x) = e^{-1/x^{r\gamma}} - \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}}{2nx^{2r\gamma}} - \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}}{n^2 x^{3r\gamma}}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{r\gamma}} + fr\gamma x^{2r\gamma-1}\right] + o(n^{-2}).$$

2. *Если* $\gamma = \frac{1}{2}$, *то*

$$P(T_n < x) = e^{-1/x^{r/2}} - \frac{e^{-1/x^{r/2}}}{2nx^{r}} - \frac{e^{-1/x^{r/2}}}{n^2 x^{3r/2}}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{r/2}} + \frac{r(f-1)}{2x^{1-r}}\right] + o(n^{-2}).$$

Теорема 5. *(Разложения $c_\alpha(n)$ для T_n).*

1. *Если* $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, *то*

$$c_\alpha(n) = v_\alpha + \frac{v_1(\alpha)}{n} + \frac{\tilde{v}_2(\alpha)}{n^2} + o(n^{-2}),$$

где $v_\alpha, v_1(\alpha)$ *как в теореме 3, а*

$$\tilde{v}_2(\alpha) = \frac{l^{(2r\gamma-1)/r\gamma}(\alpha)}{r\gamma}\left[\Big(\frac{1}{r\gamma} + \frac{17}{6}\Big) + \frac{15}{8} l(\alpha)\right] + f.$$

2. *Если* $\gamma = \frac{1}{2}$, *то*

$$c_\alpha(n) = \bar{v}_\alpha + \frac{\bar{v}_1(\alpha)}{n} + \frac{v_{22}(\alpha)}{n^2} + o(n^{-2}),$$

где $\bar{v}_\alpha, \bar{v}_1(\alpha)$ *как в теореме 3, а*

$$v_{22}(\alpha) = \frac{2l^{(2r-2)/r}(\alpha)}{r}\left[\Big(\frac{2}{r} + \frac{17}{6}\Big) + \frac{15}{8} l(\alpha)\right] - 1 + f - 1.$$

Теорема 6. *(Асимптотический дефект при детерминированном числе клиентов.) Пусть* $\pi_n^* = c_\alpha^*(n)$ *и* $\pi_n = c_\alpha(n)$. *Тогда*

1. *при* $0 < \gamma < \frac{1}{2}$:

$$d = \frac{f}{v_1(\alpha)} = fr\gamma\,[-\log(1-\alpha)]^{(1-r\gamma)/r\gamma};$$

2. *при* $\gamma = \frac{1}{2}$:

$$d = \frac{f-1}{\bar{v}_1(\alpha)} = \frac{(f-1)r}{2[-\log(1-\alpha)]^{(2-r)/r}}.$$

1.2. Случайное число клиентов

Пусть N_n — независимое от X_i случайное число клиентов, $EN_n = n$.

Теорема 7. *(Асимптотика распределения* S_{N_n}*).*

1. *Если выполнены условия следствия 1, то для* $x > \theta > 0$

$$\Big|P(S_{N_n} < x) - e^{-1/x^{r\gamma}} + \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}\, EN_n^{-1}}{2x^{2r\gamma}} + \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}\, EN_n^{-2}}{x^{3r\gamma}}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{r\gamma}}\Big)\Big| \le C(\theta)\, \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}\, EN_n^{-\min(1/\gamma,3)}}{h_1(x)}.$$

2. *Если выполнены условия следствия 2, то при* $x > \theta > 0$

$$\Big|P(S_{N_n} < x) - e^{-1/x^{r/2}} + \frac{e^{-1/x^{r/2}}\, EN_n^{-1}}{2x^{r}} + \frac{e^{-1/x^{r/2}}\, EN_n^{-2}}{x^{3r/2}}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{r/2}} - \frac{r}{2x^{1-r}}\Big)\Big| \le C(\theta)\, e^{-1/x^{r/2}}\, EN_n^{-3}\, h_2(x).$$

Следствие 3. *Пусть*

$$EN_n = n, \quad EN_n^{-1} = \frac{1}{n} + \frac{a_1}{n^2} + o(n^{-2}), \quad EN_n^{-2} = \frac{a_2}{n^2} + o(n^{-2}), \quad EN_n^{-3} = o(n^{-2}).$$

Тогда для $x > \theta > 0$:

1. *при $0 < \gamma < \frac{1}{2}$*

$$P(S_{N_n} < x) = e^{-1/x^{r\gamma}} - \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}}{2nx^{2r\gamma}} - \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}}{n^2 x^{3r\gamma}}\Big[a_2\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{r\gamma}}\Big) + \frac{a_1 x^{r\gamma}}{2}\Big] + o(n^{-2});$$

2. *при $\gamma = \frac{1}{2}$*

$$P(S_{N_n} < x) = e^{-\frac{1}{x^{\frac{r}{2}}}} - \frac{e^{-\frac{1}{x^{\frac{r}{2}}}}}{2nx^r} - \frac{e^{-1/x^{\frac{r}{2}}}}{n^2 x^{\frac{3r}{2}}}\Big[a_2\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{\frac{r}{2}}} - \frac{r}{2x^{1-r}}\Big) + \frac{a_1 x^{\frac{r}{2}}}{2}\Big] + o(n^{-2}).$$

Следствие 4. *(Дефект при качестве $\pi_n = P(\cdot < x)$). Пусть $\pi_n^* = P(S_n < x)$, $\pi_n = P(S_{N_n} < x)$. Тогда*

$$d = \frac{2(a_2 - 1)}{x^{r\gamma}}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{r\gamma}}\Big) + a_1,$$

а при $\gamma = \frac{1}{2}$

$$d = \frac{2(a_2 - 1)}{x^{r/2}}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{8x^{r/2}} - \frac{r}{2x^{1-r}}\Big) + a_1.$$

Определим α-резерв $\bar{c}_\alpha(n)$ статистики S_{N_n} из

$$P(S_{N_n} \geq \bar{c}_\alpha(n)) = \alpha + o(n^{-2}), \quad n \to \infty.$$

Следствие 5. *Пусть выполнены условия следствия 3 и 1 при $a_2 = 1$. Тогда*

$$\bar{c}_\alpha(n) = v_\alpha + \frac{v_1(\alpha)}{n} + \frac{u_2(\alpha)}{n^2} + o(n^{-2}),$$

где $v_\alpha, v_1(\alpha), v_2(\alpha)$ как в теореме 3, а

$$u_2(\alpha) = v_2(\alpha) + \frac{a_1\, l^{\,1-1/(r\gamma)}(\alpha)}{2r\gamma}, \qquad l(\alpha) = -\log(1-\alpha).$$

Если $\gamma = \frac{1}{2}$, то

$$\bar{c}_\alpha(n) = \bar{v}_\alpha + \frac{\bar{v}_1(\alpha)}{n} + \frac{\bar{u}_2(\alpha)}{n^2} + o(n^{-2}),$$

где $\bar{v}_\alpha, \bar{v}_1(\alpha), \bar{v}_2(\alpha)$ как в теореме 3, а

$$\bar{u}_2(\alpha) = \bar{v}_2(\alpha) + \frac{a_1\, l^{\,1-2/r}(\alpha)}{r}.$$

Следствие 6. *(Дефект при качестве $\pi_n = c_\alpha$). Пусть $\pi_n^* = c_\alpha^*(n)$, $\pi_n = \bar{c}_\alpha(n)$. Тогда*

$$d = \frac{u_2(\alpha) - v_2(\alpha)}{v_1(\alpha)} = \frac{a_1\, l_{r\gamma}^{\gamma-1}(\alpha)}{\gamma^2},$$

а при $\gamma = \frac{1}{2}$

$$d = \frac{\bar{u}_2(\alpha) - \bar{v}_2(\alpha)}{\bar{v}_1(\alpha)} = \frac{a_1\, l^{2(r-2)/r}(\alpha)}{2}.$$

2. Случай распределения Делапорта и обобщенного распределения Пуассона

В этом разделе зададим усечённые в нуле распределение Делапорта и обобщённое распределение Пуассона, выведем асимптотические разложения обратных моментов $\mathbb{E}[Y^{-p}]$ для $p \in \{1, 2, 3\}$ с оценками остаточного члена. Далее рассмотрим асимптотические разложения при моделировании числа клиентов данными распределениями.

2.1. Усечённое в нуле распределение Делапорта

Распределение Делапорта было впервые упомянуто в статье П. Ж. Делапорта [26]. Позднее показано его прямое применение в страховании: использование распределения Делапорта обеспечивает более гибкую подгонку счётных данных путём раздельного контроля среднего и дисперсии [27].

Неусечённая версия распределения Делапорта может быть представлена как сумма независимых

$$X = P + N, \qquad P \sim \mathrm{Pois}(\lambda), \quad N \sim \mathrm{NB}\big(r = \alpha,\ p = \tfrac{1}{1+\beta}\big),$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda \geq 0$. Тогда

$$\mu_X = \lambda + \alpha\beta, \qquad \sigma_X^2 = \lambda + \alpha\beta(1+\beta), \qquad \gamma_X^{(3)} = \lambda + \alpha\beta(1+\beta)(1+2\beta). \tag{2}$$

Вероятности (см. [26, 27]):

$$\mathbb{P}(X = j) = \sum_{i=0}^{j} \frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha)\, i!} \frac{\beta^i}{(1+\beta)^{\alpha+i}} \frac{\lambda^{j-i} e^{-\lambda}}{(j-i)!}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

и $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda}(1+\beta)^{-\alpha}$. Для нуль-усечённой версии $Y = X \mid X \geq 1$:

$$\mathbb{E}[Y^k] = \frac{\mathbb{E}[X^k]}{1 - e^{-\lambda}(1+\beta)^{-\alpha}}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

В частности,

$$\mu \equiv \mathbb{E}Y = \frac{\mu_X}{1 - e^{-\lambda}(1+\beta)^{-\alpha}}, \tag{4}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{\sigma_X^2 + \mu_X^2}{1 - e^{-\lambda}(1+\beta)^{-\alpha}} - \left(\frac{\mu_X}{1 - e^{-\lambda}(1+\beta)^{-\alpha}}\right)^2, \tag{5}$$

$$\gamma_3 \equiv \mathbb{E}\big[(Y-\mu)^3\big] = \frac{\mathbb{E}[X^3]}{1 - e^{-\lambda}(1+\beta)^{-\alpha}} - 3\mu \frac{\mathbb{E}[X^2]}{1 - e^{-\lambda}(1+\beta)^{-\alpha}} + 2\mu^3. \tag{6}$$

Здесь $\mathbb{E}[X^2] = \sigma_X^2 + \mu_X^2$, $\mathbb{E}[X^3] = \mu_X^3 + 3\mu_X\sigma_X^2 + \gamma_X^{(3)}$.

Лемма 1 (Разложение $\mathbf{E}[\mathbf{Y^{-p}}]$ для нуль-усечённого Делапорта)**.** *Пусть $Y \sim$ ZT-Delap(α, β, λ) и $p \in \{1, 2, 3\}$. Тогда*

$$\mathbb{E}\, Y^{-p} = \mu^{-p} + \frac{p(p+1)}{2}\, \mu^{-(p+2)}\, \mathrm{Var}(Y) \;-\; \frac{p(p+1)(p+2)}{6}\, \mu^{-(p+3)}\, \gamma_3 \;+\; R_p, \quad (7)$$

где μ, $\mathrm{Var}(Y)$, γ_3 выражены через (α, β, λ) формулами (4)–(6), а остаток удовлетворяет оценке

$$|R_p| \le \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{24}\, \mathbb{E}\big[(Y-\mu)^4\big]\,. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $f(y) = y^{-p}$. По формуле Тейлора:

$$f(Y) = f(\mu) + f'(\mu)(Y-\mu) + \frac{f^{(2)}(\mu)}{2}(Y-\mu)^2 + \frac{f^{(3)}(\mu)}{6}(Y-\mu)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_Y)}{24}(Y-\mu)^4,$$

где $\xi_Y = \mu + \theta(Y-\mu)$, $\theta \in (0,1)$. Усредняя и используя то, что $\mathbb{E}(Y-\mu) = 0$, получаем (7). Так как $Y \ge 1$, то $f^{(4)}(\xi_Y) \le p(p+1)(p+2)(p+3)$, что и даёт (8). Связь $\mu, \mathrm{Var}(Y), \gamma_3$ с (α, β, λ) обеспечивается (4)–(6). □

2.2. Усечённое в нуле обобщенное распределение Пуассона

Обобщённое пуассоновское распределение естественно возникает в задачах, где среднее и дисперсия различаются (в отличие от стандартного пуассоновского случая). Классический пример — регрессионный анализ счётных данных с возможной сверхдисперсией или недодисперсией. Этой проблеме посвящена статья, где разработана и применена регрессионная модель для count-данных, адекватно описывающая как over-, так и under-dispersion [29].

Пусть $X \sim \mathrm{GP}(\lambda, \theta)$, $0 \le \theta < 1$:

$$\mathbb{P}(X = j) = \frac{\lambda(\lambda + \theta j)^{j-1}}{j!}\, e^{-\lambda - \theta j}, \qquad j = 0, 1, 2, \dots,$$

и $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda}$. Из известных моментов:

$$\mu_X = \frac{\lambda}{1-\theta}, \qquad \sigma_X^2 = \frac{\lambda}{(1-\theta)^3}, \qquad \gamma_X^{(3)} = \frac{\lambda(1+\theta)}{(1-\theta)^5}. \quad (9)$$

Для $Y = X \mid X \ge 1$ имеем (с (3) и $p_0 = e^{-\lambda}$):

$$\mu = \frac{\mu_X}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{(1-\theta)\,(1 - e^{-\lambda})}, \quad (10)$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{\sigma_X^2 + \mu_X^2}{1 - e^{-\lambda}} - \left(\frac{\mu_X}{1 - e^{-\lambda}}\right)^2, \quad (11)$$

$$\gamma_3 = \frac{\mu_X^3 + 3\mu_X\sigma_X^2 + \gamma_X^{(3)}}{1 - e^{-\lambda}} - 3\mu\, \frac{\sigma_X^2 + \mu_X^2}{1 - e^{-\lambda}} + 2\mu^3. \quad (12)$$

Лемма 2 (Разложение $\mathbf{E}[\mathbf{Y}^{-\mathbf{p}}]$ для нуль-усечённого GP)**.** *Пусть* $Y \sim$ ZT-GP(λ, θ) *и* $p \in \{1, 2, 3\}$*. Тогда справедливо* (7) *с подстановкой* (10)–(12)*, а остаток удовлетворяет неравенству*

$$|R_p| \leq \frac{p(p+1)(p+2)(+3)}{24}\, \mathbb{E}\big[(Y-\mu)^4\big]\,.$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1. Для $Y \geq 1$ имеем верхнюю оценку на $f^{(4)}(\xi_Y)$ и перенос моментов при нуль-усечении через (3). □

2.3. Асимптотика для случайного числа клиентов N_n

Пусть N_n — случайное число клиентов, имеющее нуль-усечённое распределение Делапорта (ZT-Delaport) или нуль-усечённое обобщённое пуассоновское распределение (ZT-GP). Параметры зависят от n так, что $EN_n = n$. Обозначим

$$\mu_n = EN_n = n, \qquad \sigma_n^2 = \mathrm{Var}(N_n), \qquad \gamma_{3,n} = E\big[(N_n - \mu_n)^3\big].$$

По теореме о разложении обратного момента (для $p \in \{1, 2, 3\}$), см. (7),

$$EN_n^{-p} = \mu_n^{-p} + \frac{p(p+1)}{2}\mu_n^{-(p+2)}\sigma_n^2 - \frac{p(p+1)(+2)}{6}\mu_n^{-(p+3)}\gamma_{3,n} + o(n^{-2}),$$

откуда при $\mu_n = n$ имеем

$$EN_n^{-1} = \frac{1}{n} + \frac{\sigma_n^2}{n^3} + o(n^{-2}), \qquad EN_n^{-2} = \frac{1}{n^2} + \frac{3\sigma_n^2}{n^4} + o(n^{-2}),$$

и, в обозначениях следствия 3,

$$EN_n^{-1} = \frac{1}{n} + \frac{a_1}{n^2} + o(n^{-2}), \qquad EN_n^{-2} = \frac{a_2}{n^2} + o(n^{-2}), \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n^2}{n}, \;\; a_2 = 1.$$

Случай ZT-Delaport

Пусть $N_n \sim$ ZT-Delap$(\alpha, \beta, \lambda_n)$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ фиксированы, λ_n выбирается из условия $EN_n = n$. Тогда $e^{-\lambda_n}(1+\beta)^{-\alpha} \to 0$ и

$$\mu_n = \lambda_n + \alpha\beta \sim n, \qquad \sigma_n^2 = \lambda_n + \alpha\beta(1+\beta) = n + \alpha\beta^2 + o(1),$$

поэтому

$$a_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n^2}{n} = 1, \qquad a_2 = 1.$$

Следствие 7. *При $x > \theta > 0$ справедливо:*
если $0 < \gamma < \frac{1}{2}$:

$$P(S_{N_n} < x) = e^{-1/x^{r\gamma}} - \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}}{2nx^{2r\gamma}} - \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}}{n^2x^{3r\gamma}}\left[\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{8x^{r\gamma}}\right) + \frac{x^{r\gamma}}{2}\right] + o(n^{-2});$$

если $\gamma = \frac{1}{2}$:

$$P(S_{N_n} < x) = e^{-1/x^{r/2}} - \frac{e^{-1/x^{r/2}}}{2nx^{r}} - \frac{e^{-1/x^{r/2}}}{n^2x^{3r/2}}\left[\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{8x^{r/2}} - \tfrac{r}{2x^{1-r}}\right) + \frac{x^{r/2}}{2}\right] + o(n^{-2}).$$

Следствие 8. *Так как* $a_2 = 1$, *то*

$$d = \frac{2(a_2 - 1)}{x^{r\gamma}}\Big(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{8x^{r\gamma}}\Big) + a_1 = a_1 = 1,$$

а при $\gamma = \frac{1}{2}$ *также* $d = 1$.

Следствие 9. *(к следствию 5) При* $a_2 = 1$ *и* $l(\alpha) = -\log(1-\alpha)$*:*

$$\bar{c}_\alpha(n) = v_\alpha + \frac{v_1(\alpha)}{n} + \frac{u_2(\alpha)}{n^2} + o(n^{-2}),$$

где

$$v_\alpha = \gamma\, l^{-1/r}(\alpha), \qquad v_1(\alpha) = \frac{\gamma}{2r}\, l^{(r-1)/r}(\alpha), \qquad u_2(\alpha) = v_2(\alpha) + \frac{1}{2r\gamma}\, l^{\,1-1/(r\gamma)}(\alpha).$$

Если $\gamma = \frac{1}{2}$, *то*

$$\bar{c}_\alpha(n) = \bar{v}_\alpha + \frac{\bar{v}_1(\alpha)}{n} + \frac{\bar{}_2(\alpha)}{n^2} + o(n^{-2}),$$

где

$$\bar{v}_\alpha = l^{-2/r}(\alpha), \qquad \bar{v}_1(\alpha) = \frac{2}{r}\, l^{(2-r)/r}(\alpha), \qquad \bar{}_2(\alpha) = \bar{v}_2(\alpha) + \frac{1}{r}\, l^{\,1-2/r}(\alpha).$$

Следствие 10. *(к следствию 6) Так как* $a_1 = 1$, *то*

$$d = \frac{u_2(\alpha) - v_2(\alpha)}{v_1(\alpha)} = \frac{1}{\gamma^2}\, l_{r\gamma}^{\gamma-1}(\alpha), \qquad \textit{а при } \gamma = \tfrac{1}{2}: \quad d = \frac{1}{2}\, l^{\,2(r-2)/r}(\alpha).$$

Случай ZT-GP

Пусть $N_n \sim$ ZT-GP(λ_n, θ), где $0 \le \theta < 1$ фиксирован, λ_n выбирается из $EN_n = n$. Тогда $e^{-\lambda_n} \to 0$ и

$$\mu_n = \frac{\lambda_n}{1-\theta} \sim n, \qquad \sigma_n^2 = \frac{\lambda_n}{(1-\theta)^3} = \frac{n}{(1-\theta)^2} + o(n),$$

поэтому

$$a_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n^2}{n} = \frac{1}{(1-\theta)^2}, \qquad a_2 = 1.$$

Следствие 11. *Для* $x > \theta > 0$ *справедливо:*
если $0 < \gamma < \frac{1}{2}$*:*

$$P(S_{N_n} < x) = e^{-1/x^{r\gamma}} - \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}}{2nx^{2r\gamma}} - \frac{e^{-1/x^{r\gamma}}}{n^2x^{3r\gamma}}\left[\Big(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{8x^{r\gamma}}\Big) + \frac{x^{r\gamma}}{2(1-\theta)^2}\right] + o(n^{-2});$$

если $\gamma = \frac{1}{2}$*:*

$$P(S_{N_n} < x) = e^{-1/x^{r/2}} - \frac{e^{-1/x^{r/2}}}{2nx^r} - \frac{e^{-1/x^{r/2}}}{n^2x^{3r/2}}\left[\Big(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{8x^{r/2}} - \tfrac{r}{2x^{1-}}\Big) + \frac{x^{r/2}}{2(1-\theta)^2}\right] + o(n^{-2}).$$

Следствие 12. *Так как $a_2 = 1$, то имеем*

$$d = a_1 = \frac{1}{(1-\theta)^2},$$

и это значение сохраняется при $\gamma = \frac{1}{2}$.

3. Эмпирическая оценка применимости распределений

3.1. Данные о погибших в авиакатастрофах

Рассмотрим данные о количестве погибших в авиакатастрофах, расследуемых Межгосударственным авиационным комитетом (МАК), с агрегированием по неделям, месяцам и годам. Эти данные доступны из открытых источников [21]. Для каждой агрегированной серии данных были подогнаны четыре модели счётных распределений: Пуассона, отрицательно-биномиальное распределение (NegBin), Делапорта и обобщённое пуассоновское распределение (GenPoisson).

Для каждой модели была выполнена максимизация логарифма правдоподобия на выборке счётных наблюдений $y_1, \ldots, y_n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Для параметризованной модели с параметрами ϑ лог-правдоподобие вычислялось как:

$$\ell(\vartheta) = \sum_{i=1}^{n} \log p_\vartheta(y_i),$$

где $p_\vartheta(y_i)$ — вероятность наблюдения y_i при параметрах ϑ. Максимизация проводилась численно с использованием метода L-BFGS-B, минимизируя отрицательное лог-правдоподобие $-\ell(\vartheta)$.

Логарифмические правдоподобия. Каждое распределение имеет соответствующую форму логарифма правдоподобия:

– **Пуассоновское распределение** ($\mu > 0$): для $y \in \mathbb{N}_0$

$$\log p(y \mid \mu) = y \log \mu - \mu - \log \Gamma(y+1).$$

– **Отрицательно-биномиальное распределение** в параметризации (μ, r), где $r > 0, \mu > 0$; для $y \in \mathbb{N}_0$

$$\log p(y \mid \mu, r) = \log \Gamma(y+r) - \log \Gamma(r) - \log \Gamma(y+1) + r \log \frac{r}{r+\mu} + y \log \frac{\mu}{r+\mu}.$$

– **Распределение Делапорта** ($\alpha > 0, \beta > 0, \lambda \geq 0$): для $y \in \mathbb{N}_0$

$$p(y \mid \alpha, \beta, \lambda) = \sum_{i=0}^{y} \frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha)\, i!} \frac{\beta^i}{(1+\beta)^{\alpha+i}} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y-i}}{(y-i)!},$$

$$\log p(y) = \log\left(\sum_{i=0}^{y} e^{\ell_i}\right),$$

где

$$\begin{gathered}\ell_i = \log \Gamma(\alpha+i) - \log \Gamma(\alpha) - \log(i!) + i \log \beta - \\ -(\alpha+i) \log(1+\beta) - \lambda + (y-i) \log \lambda - \log((y-i)!).\end{gathered}$$

– **Обобщённое пуассоновское распределение** для $\mu > 0, \phi \in (-1, 1)$ и условии $\mu + \phi y > 0$ для всех $y \in \mathbb{N}_0$:

$$p(y \mid \mu, \phi) = \frac{\mu(\mu + \phi y)^{y-1}}{y!} e^{-\mu - \phi y},$$

а

$$\log p(y \mid \mu, \phi) = \log \mu + (y - 1)\log(\mu + \phi y) - \mu - \phi y - \log \Gamma(y + 1).$$

Критерии сравнения моделей. Для каждой подгонки вычислялись следующие критерии:

$$\mathrm{AIC} = 2k - 2\ell(\widehat{\vartheta}), \quad \mathrm{BIC} = k \log n - 2\ell(\widehat{\vartheta}),$$

где k — число свободных параметров модели ($k = 1$ для Пуассона, $k = 2$ для NegBin и GenPoisson, $k = 3$ для Делапорта).

χ^2-критерий согласия. Статистика χ^2 вычисляется как:

$$\chi^2 = \sum_g \frac{(O_g - E_g)^2}{E_g},$$

где $E_g = n \cdot \sum_{j \in g} \widehat{p}(j)$ — ожидаемая частота в группе g, а O_g — наблюдаемая частота. Статистика сравнивается с распределением χ^2_ν, где $\nu = G - 1$ — количество степеней свободы, а G — число групп после объединения.

Таблица 1: *Сравнение моделей для числа погибших (агрегация по месяцам, неделям и годам) на данных МАК [21]*

Ряд	**Модель**	$\log L$	*AIC*	*BIC*	χ^2	*df*	p	μ	r	α	β	λ	φ
monthly	GenPoisson	−757.03	1518.06	1525.19	29.31	18	0.045	1.15					0.89
monthly	NegBin	−765.59	1535.19	1542.32	44.79	20	0.001	10.29	0.27				
monthly	Delaporte	−765.59	1537.19	1547.89	44.79	20	0.001			0.27	37.66	0.00	
monthly	Poisson	−4185.74	8373.48	8377.05	0.00	1	1.00	10.29					
weekly	GenPoisson	−1380.14	2764.27	2774.34	34.77	18	0.010	0.29					0.88
weekly	Delaporte	−1405.52	2817.05	2832.15	76.56	21	0.00			0.07	34.98	0.05	
weekly	NegBin	−1411.37	2826.74	2836.81	77.73	22	0.00	2.37	0.08				
weekly	Poisson	−7761.72	15 525.44	15 530.48	6033.06	7	0.00	2.37					
yearly	NegBin	−127.09	258.19	260.37	0.00	1	1.00	119.23	1.20				
yearly	Delaporte	−127.09	260.19	263.46	0.00	1	1.00			1.20	99.71	0.00	
yearly	GenPoisson	−131.50	266.99	269.18	0.00	1	1.00	9.16					0.92
yearly	Poisson	−877.97	1757.93	1759.03	0.00	1	1.00	119.23					

На основе значений AIC, BIC и критериев согласия, обобщённое распределение Пуассона показало наилучшие результаты при агрегировании по месяцам и неделям, что подтверждает его способность моделировать как сверхдисперсию, так и недодисперсию (параметр $\varphi = \theta$). Распределение Делапорта и обобщённое распределение Пуассона остаются конкурентоспособными при агрегировании по годам. С учётом этих результатов, использование усечённых в нуле вариантов распределений Делапорта и обобщённого распределения Пуассона представляется целесообразным именно на годовой агрегации, так как в контексте данного исследования предполагается, что страховой полис действует около года, и в любой год в авиакатастрофах погибает хотя бы один человек.

3.2. Данные о наводнениях

Для проведения анализа использовались данные Национальной программы страхования от наводнений в США (NFIP), основанной в 1968 году с целью уменьшения ущерба от наводнений через управление рисками и предоставление страховой защиты населению. Программа ориентирована на снижение потерь, вызванных наводнениями, путем создания зон затопления, оценки рисков и предоставления страховых полисов для покрытия этих рисков.

Исходные данные [23] включают более 2 миллионов транзакций, связанных с выплатами страховых возмещений за ущерб, причинённый наводнениями. В этих данных содержится информация о страховых премиях и суммах выплат по застрахованной собственности, повреждённой в результате наводнений.

Для анализа, аналогично исследованию данных об авиапроисшествиях, были использованы несколько моделей распределений: распределение Делапорта, отрицательно-биномиальное распределение (NegBin), обобщённое пуассоновское распределение (GenPoisson) и стандартное пуассоновское распределение (Poisson). В качестве объекта анализа были выбраны 10 штатов, которые лидируют по числу страховых обращений за период с 1979 по 2025 год. Выборка представляла собой количество транзакций, совершённых клиентами в каждый год.

Для каждой модели была проведена подгонка, и для каждого штата были рассчитаны значения логарифма правдоподобия, а также показатели информационных критериев AIC и BIC. Результаты подгонки для всех моделей представлены в Таблице 2. Анализ показал, что для каждого штата распределение Делапорта демонстрировало наилучшие результаты по сравнению с другими моделями, в то время как обобщённое распределение Пуассона оставалось конкурентоспособным для большинства случаев.

Заключение

В работе рассмотрено конкретное распределение Бёрра (см. работы [6,7] и, например, книгу [8], стр. 243) в применении к описанию деятельности организации, подверженной риску. Исследовано асимптотическое поведение необходимого резерва в случае максимума потерь страховой компании (организации, подверженной риску). При этом рассматривается простейшая модель страхования, в которой число факторов, приводящих к убытку (число клиентов), как случайно, так и детерминировано. Проведено асимптотическое сравнение деятельности таких организаций в терминах необходимого добавочного числа факторов (клиентов). Приведены явные формулы для асимптотического дефекта. Рассмотрены три конкретных примера, иллюстрирующие полученные результаты. Примеры касаются распределения Делапорта, усеченных биномиальных и пуассоновских распределений, характеризующих случайное число клиентов.

Таблица 2: *Результаты подгонки моделей для данных о наводнениях в США. Для штата NJ данные по распределению Пуассона неоткалиброваны в силу того, что процесс оптимизации выходил за рамки временного лимита*

Штат	**Модель**	**logLik**	**AIC**	**BIC**	μ	r	α	β	λ	φ
CA	Delaporte	-352.45	710.89	716.50			0.47	1449.44	19.45	
CA	NegBin	-358.06	720.11	723.85	698.83	0.62				
CA	GenPoisson	-370.16	744.31	748.05	14.55					0.95
CA	Poisson	-27565.95	55133.90	55135.77	698.83					
FL	Delaporte	-457.04	920.08	925.69			0.50	12275.33	44.11	
FL	NegBin	-459.44	922.87	926.61	6180.31	0.55				
FL	GenPoisson	-750.52	1505.03	1508.77	51.53					0.95
FL	Poisson	-277799.44	555600.87	555602.74	6180.31					
IL	Delaporte	-367.65	741.30	746.91			0.72	1112.57	12.44	
IL	NegBin	-368.99	741.99	745.73	814.81	0.81				
IL	GenPoisson	-385.61	775.22	778.96	19.82					0.95
IL	Poisson	-23220.12	46442.23	46444.10	814.81					
LA	Delaporte	-461.21	928.41	934.03			0.43	17188.75	124.02	
LA	NegBin	-467.37	938.75	942.49	7533.29	0.52				
LA	GenPoisson	-818.66	1641.33	1645.07	62.93					0.95
LA	Poisson	-443928.48	887858.96	887860.83	7533.29					
MS	Delaporte	-369.34	744.68	750.29			0.45	2233.36	51.22	
MS	NegBin	-378.30	760.60	764.34	1051.46	0.64				
MS	GenPoisson	-395.33	794.65	800.58	21.40					0.95
MS	Poisson	-53474.81	106951.62	106953.49	1051.46					
NC	Delaporte	-390.53	787.06	792.67			0.44	3641.11	75.40	
NC	NegBin	-398.85	801.71	805.45	1677.13	0.59				
NC	GenPoisson	-440.31	884.61	891.35	27.50					0.95
NC	Poisson	-78422.95	156847.91	156849.78	1677.12					
NJ	Delaporte	-413.04	832.08	838.28			0.33	10076.68	89.78	
NJ	NegBin	-422.95	849.89	856.43	3397.35	0.44				
NJ	GenPoisson	-560.44	1124.89	1131.49	30.29					0.95
NJ	Poisson	-	-	-	-	-	-	-	-	-
NY	Delaporte	-408.68	823.36	828.97			0.36	7563.92	106.88	
NY	NegBin	-421.44	846.88	853.48	2857.56	0.53				
NY	GenPoisson	-522.49	1048.98	1055.71	34.56					0.95
NY	Poisson	-180175.62	360353.24	360355.11	2857.56					
PA	Delaporte	-380.40	766.79	772.40			0.51	2302.89	65.57	
PA	NegBin	-387.42	778.83	782.57	1232.60	0.71				
PA	GenPoisson	-408.09	820.17	826.51	26.45					0.95
PA	Poisson	-50644.62	101291.24	101293.11	1232.60					
TX	Delaporte	-463.04	932.08	937.70			0.61	10237.97	79.54	
TX	NegBin	-465.08	934.15	940.53	6314.25	0.67				
TX	GenPoisson	-717.40	1438.80	1442.54	82.35					0.95
TX	Poisson	-274385.69	548773.39	548775.26	6314.25					

Список литературы

[1] Гнеденко Б.В. Об оценке неизвестных параметров распределения при случайном числе независимых наблюдений // Труды Тбилисского Математического института. 1989. Т. 92. С. 146–150.

[2] Гнеденко Б.В., Фахим Х. Об одной теореме переноса // Доклады Академии наук СССР. 1969. Т. 187. С. 15–17.

[3] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Об использовании распределения Стьюдента в задачах теории вероятностей и математической статистики // Теория вероятностей и ее применения. 2004. Т. 49, № 3. С. 417–435. https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159

[4] Bening V.E., Korolev V.Yu. Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance. Utrecht: VSP, 2002. 434 p.

[5] Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Некоторые статистические задачи, связанные с распределением Лапласа // Информатика и ее применения. 2008. Т. 2, № 2. С. 19–34.

[6] Burr I.W. Cumulative frequency functions // The Annals of Mathematical Statistics. 1942. Vol. 13. Pp. 215–232.

[7] Hakim A.R., Fithrani M., Novita M. Properties of Burr distribution and its application to heavy-tailed survival time data // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Pp. 10–15.

[8] Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966. 588 с.

[9] Bening V.E. Transfer theorems concerning asymptotic expansions for the distribution functions of statistics based on samples with random sizes // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. 2018. Vol. 28, № 2. Pp. 187–200.

[10] Bening V.E. On the asymptotic deficiency of some statistical estimators based on samples with random sizes // Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society. 2018. Vol. 21, № 2. Pp. 185–193.

[11] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении квантилей распределений статистик, основанных на выборках случайного объема // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 5–12. https://doi.org/10.26456/vtpmk175

[12] Бенинг В.Е. О поведении асимптотического дефекта квантилей распределений статистик, основанных на выборках случайного объема // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 42–57. https://doi.org/10.26456/vtpmk509

[13] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении резерва страховой компании // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 35–48. https://doi.org/10.26456/vtpmk594

[14] Бенинг В.Е. О сравнении необходимых резервов организаций, подверженных риску, с помощью понятия дефект // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 5–26. https://doi.org/10.26456/vtpmk643

[15] Lehmann E.L., Casella G. Theory of Point Estimation. Berlin: Springer, 1998. 589 p.

[16] Hodges J.L., Lehmann E.L. Deficiency // The Annals of Mathematical Statistics. 1970. Vol. 41, № 5. Pp. 783–801.

[17] Bening V.E. Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses: Efficient Statistics, Optimality, Power Loss, and Deficiency. Berlin: Walter de Gruyter, 2011. 299 p.

[18] Znidaric M. Asymptotic expansion for inverse moments of binomial and Poisson distributions. arXiv:math/0511226v1[math.ST]. 2005.

[19] Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1976. 648 с.

[20] Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972. 414 с.

[21] Межгосударственный авиационный комитет (МАК). Расследования авиационных происшествий [Электронный ресурс] // Официальный сайт МАК. URL: https://mak-iac.org/rassledovaniya/.

[22] Бенинг В.Е. О применении распределения Бёрра к асимптотическому исследованию поведения резерва страховой компании // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2024. № 3. С. 42–56.

[23] Федеральное агентство по управлению чрезвычайными ситуациями (FEMA). Данные о заявках по страхованию от наводнений (NFIP) [Электронный ресурс] // Официальный API FEMA. URL: https://www.fema.gov/api/open/v2/FimaNfipClaims.

[24] Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении среднего суммарного резерва страховой компании для случайного числа клиентов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 2. С. 5–21.

[25] Бенинг В.Е. О поведении максимума в случае распределения Бёрра // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 3. С. 5–17.

[26] Delaporte P. Quelques problemes de statistique mathematique poses par l'assurance automobile et le bonus pour non sinistre // Bulletin Trimestrial de l'Institut des Actuaries Francaise. 1959. Vol. 227. Pp. 87–102.

[27] Tzougas G.J. Actuarial Modelling of Claim Counts and Losses in Motor Third Party Liability Insurance // ASTIN Bulletin. 2014.

[28] Consul P.C., Jain G.C. A Generalization of the Poisson Distribution // Technometrics. 1973. Vol. 15, № 4. Pp. 791–799.

[29] Famoye F. Restricted generalized Poisson regression model // Communications in Statistics — Theory and Methods. 1993. Vol. 22, № 5. Pp. 1335–1354.

Образец цитирования

Арифуллин А.И., Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении максимальных потерь страховых компаний при случайном числе клиентов: модели распределений и их применения // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 1. С. 39–59. https://doi.org/10.26456/vtpmk772

Сведения об авторах

1. **Арифуллин Артур Исхакович**
   магистрант кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

   Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.
   E-mail: artur.arifullin@yandex.ru

2. **Бенинг Владимир Евгеньевич**
   профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

   Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.
   E-mail: bening@yandex.ru

ON THE ASYMPTOTIC BIHAVIOUR OF THE MAXIMUM LOSS OF INSURANCE COMPANIES IN THE CASE OF RANDOM SIZE OF CLIENTS: DISTRIBUTION MODELS AND THEIR APPLICATIONS

Arifullin A.I., Bening V.E.
Lomonosov Moscow State University, Moscow

Received 03.10.2025, revised 27.11.2025.

The paper considers the asymptotic behavior of the dstrbution function and the moments of extreme values of an organization subjected to risk in the case when the number of factors leading to loss is random. Burr distribution is considered as loss distribution. An asymptotic comparison of the activities of such organizations is carried out in terms of the necessary additional number of such factors (asymptotic deficiency). Three examples illustrating tne obtained results are presented. These examples concern Delaporte dstrbtn, truncated Poisson and binomial distributions.

Keywords: reserve of insurance company, sample of random size, Burr distribution, Delaporte distribution, asymptotic expansions, truncated Poisson and binomial distributions, extreme order statistics, asymptotic deficiency.

Citation

Arifullin A.I., Bening V.E., "On the asymptotic bihaviour of the maximum loss of insurance companies in the case of random size of clients: distribution models and their applications", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2026, № 1, 39–59 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk772

References

[1] Gnedenko B.V., "On the estimation of unknown distribution parameters for a random number of independent observations", *Trudy Tbilisskogo Matematicheskogo instituta [Proceedings of the Tbilisi Mathematical Institute]*, **92** (1989), 146–150 (in Russian).

[2] Gnedenko B.V., Fakhim Kh., "On a transfer theorem", *Doklady Mathematics*, **187** (1969), 15–17 (in Russian).

[3] Bening V.E., Korolev V.Y., "On an application of the Student distribution in the theory of probability and mathematical statistics", *Theory of Probability and its Applications*, **49**:3 (2005), 377–391, https://doi.org/10.1137/S0040585X97981159.

[4] Bening V.E., Korolev V.Yu., *Generalized Poisson Models and Their Applications in Insurance and Finance*, VSP, Utrecht, 2002, 434 pp.

[5] Bening V.E., Korolev V.Yu., "Some statistical problems related to the Laplace distribution", *Informatics and Applications*, **2**:2 (2008), 19–34 (in Russian).

[6] Burr I.W., "Cumulative frequency functions", *The Annals of Mathematical Statistics*, **13** (1942), 215–232.

[7] Hakim A.R., Fithrani M., Novita M., "Properties of Burr distribution and its application to heavy-tailed survival time data", *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, 10–15.

[8] Kendall M., Stuart A., *The Advanced Theory of Statistics*, Charles Griffin, London, 1945, 457 pp.

[9] Bening V.E., "Transfer theorems concerning asymptotic expansions for the distribution functions of statistics based on samples with random sizes", *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **28**:2 (2018), 187–200.

[10] Bening V.E., "On the asymptotic deficiency of some statistical estimators based on samples with random sizes", *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, **21**:2 (2018), 185–193.

[11] Bening V.E., "On asymptotic behavior of quantiles of the distributions of statistics based on the samples with random sizes", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 5–12 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk175.

[12] Bening V.E., "On asymptotic behavior of quantiles deficiencies of the distributions of statistics based on the samples with random sizes", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2018, № 3, 42–57 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk509.

[13] Bening V.E., "On the asymptotic behavior of insurance company reserve", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 35–48 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk594.

[14] Bening V.E., "On the organizations' risk reserves comparison based on the deficiency concept", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 3, 5–26 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk643.

[15] Lehmann E.L., Casella G., *Theory of Point Estimation*, Springer, Berlin, 1998, 589 pp.

[16] Hodges J.L., Lehmann E.L., "Deficiency", *The Annals of Mathematical Statistics*, **41**:5 (1970), 783–801.

[17] Bening V.E., *Asymptotic Theory of Testing Statistical Hypotheses: Efficient Statistics, Optimality, Power Loss, and Deficiency*, Walter de Gruyter, Berlin, 2011, 299 pp.

[18] Znidaric M., *Asymptotic expansion for inverse moments of binomial and Poisson distributions*, arXiv:math/0511226v1[math.ST], 2005.

[19] Kramer G., *Matematicheskie metody statistiki [Mathematical methods of statistics]*, Mir Publ., Moscow, 1976 (in Russian), 648 pp.

[20] Petrov V.V., *Summy nezavisimykh sluchajnykh velichin [Sums of independent random variables]*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (in Russian), 414 pp.

[21] *Investigation of aviation accidents*, Official website of the IAC (in Russian), https://mak-iac.org/rassledovaniya/.

[22] Bening V.E., "On the application of the Burr distribution to the asymptotic study of the behavior of an insurance company's reserve", *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 15: Vychislitelnaya matematika i kibernetika [Bulletin of Moscow University. Series 15: Computational Mathematics and Cybernetics]*, 2024, № 3, 42–56 (in Russian).

[23] *Data on flood insurance claims (NFIP)*, Official FEMA API (in Russian), https://www.fema.gov/api/open/v2/FimaNfipClaims.

[24] Bening V.E., "On the asymptotic behavior of the average total reserve of an insurance company for a random number of clients", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2025, № 2, 5–21 (in Russian).

[25] Bening V.E., "On the behavior of the maximum in the case of the Burr distribution", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2024, № 3, 5–17 (in Russian).

[26] Delaporte P., "Quelques problemes de statistique mathematique poses par l'assurance automobile et le bonus pour non sinistre", *Bulletin Trimestrial de l'Institut des Actuaries Francaise*, **227** (1959), 87–102.

[27] Tzougas G.J., "Actuarial Modelling of Claim Counts and Losses in Motor Third Party Liability Insurance", *ASTIN Bulletin*, 2014.

[28] Consul P.C., Jain G.C., "A Generalization of the Poisson Distribution", *Technometrics*, **15**:4 (1973), 791–799.

[29] Famoye F., "Restricted generalized Poisson regression model", *Communications in Statistics — Theory and Methods*, **22**:5 (1993), 1335–1354.

Author Info

1. **Arifullin Artur Iskhakovich**
Master student at the Department of Mathematical Statistics,
Lomonosov Moscow State University.

Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: *artur.arifullin@yandex.ru*

2. **Bening Vladimir Evgenyevich**
Professor in the Department of Mathematical Statistics,
Lomonosov Moscow State University.

Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: bening@yandex.ru