УДК 004.056.5 , 519.854.2

НЕЧЕТКАЯ ЗАДАЧА О ВНЕДРЕНИИ СРЕДСТВ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ, ОПИСЫВАЕМАЯ БИКРИТЕРИАЛЬНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕЙ О РАНЦЕ

Бураго П.Н.[*], Тростин В.Л.[**], Хранилов В.П.[*], Эгамов А.И.[***]
[*]НГТУ имени Р.Е. Алексеева, г. Нижний Новгород
[**]Институт пищевых технологий и дизайна, г. Нижний Новгород
[***]ННГУ имени Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

Поступила в редакцию 22.01.2026, после переработки 09.03.2026.

Работа посвящена одной из самых актуальных и важных проблем XXI века – проблеме кибербезопасности. Представлена нечеткая математическая модель внедрения средств защиты информации для групп информационных активов коммерческой организации. В рамках теории нечетких множеств она предполагает переход к четкой задаче, которая представляет собой бикритериальную многомерную задачу о ранце (БМЗР) с аддитивным и максиминным критериями; максимизируется свертка этих критериев. Для ее решения предложен авторский алгоритм, который опирается на делегирование поиска оптимальных решений вспомогательных однокритериальных многомерных задач о ранце специализированному облачному сервису Google Colaboratory. Доказана корректность алгоритма.

Ключевые слова: кибербезопасность, средства защиты информации, группы информационных активов, время обхода защиты, задача о ранце, дефаззификация, треугольное нечеткое число.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 1. С. 60–78.
https://doi.org/10.26456/vtpmk763

Введение

Вопросы кибербезопасности являются в современном информационном мире особенно актуальными и постоянно находятся на повестке дня всех пользователей компьютерной техники. Решение этих вопросов не может быть отложено на «долгий срок», а утечка информации вследствие хакерских кибератак негативно отражается как на репутации государственных организаций, так и на доходах коммерческих предприятий; кроме того, она отрицательно воздействует на личное финансовое и психологическое состояние пострадавших субъектов. В наше время информационная безопасность стала определяющим условием стабильного функционирования предприятий и коммерческих компаний. Защита информации как личных, так и корпоративных данных имеет важное значение, особенно в связи постоянно увеличивающимся набором и разнообразием кибератак (вредоносное ПО, фишинг, социальная инженерия и т. д.) [1]. В научной литературе с каждым годом увеличивается число публикаций на тему кибербезопасности (см., например, обзор [2]). Одной из важных тем является своевременная установка и внедрение средств защиты информации (СЗИ) для групп информационных активов (ГИА) в различных государственных учреждениях и коммерческих организациях.

Внедрение СЗИ для ГИА или же замена устаревших СЗИ требует довольно значительного количества финансовых ресурсов, в связи с чем возникает вопрос об оптимальном, в том или ином смысле, решении проблемы. Это приводит к построению математических моделей, сводящихся к задачам линейного программирования и дискретной оптимизации [3]– [7], например, широко известным, начиная с середины прошлого века, задаче о назначениях [8] или задаче о ранце [9], [10].

Множество современных практических задач о наполнении различных складов, перевозки грузов, принятии финансовых и производственных решений (в том числе по вопросам кибербезопасности) сводятся к задаче о ранце. Задача о ранце является одной из самых известных задач дискретной оптимизации. Вначале она рассматривалась как одномерная задача с одним аддитивным критерием, а впоследствии она переросла в многокритериальную многомерную задачу [11]– [13], см. также обзоры [14], [15], причем в число критериев входят как аддитивные, так и максиминные, диапазонные и точечные критерии.

В последнее время особое внимание исследователей привлекают нечеткие задачи, в которых параметры определяются приблизительно и моделируются посредством треугольных или трапецеидальных нечетких чисел [16]– [18]. В рассматриваемой задаче нечеткость также играет большую роль, поскольку время «обхода СЗИ» хакерской атакой априори точно знать невозможно. Под обходом СЗИ понимаются методы, позволяющие злоумышленникам избежать обнаружения или блокировки средствами защиты (например, антивирусами или межсетевыми экранами). В связи с этим в математической модели приходится работать с нечеткими числами, чтобы математически описать приблизительное время обхода СЗИ хакерской атакой.

Нечеткость задачи о внедрении СЗИ заключается в том, что параметры целевых функций критериев задаются треугольными нечеткими числами (ТНЧ). Один из критериев качества в этой задаче является аддитивным – необходимо максимизировать время последовательного обхода всех поставленных СЗИ. Второй критерий является максиминным – необходимо максимизировать минимальное время реагирования центром мониторинга отдела безопасности на инцидент, связанный с обходом СЗИ. Другие параметры определяются четко, так как цены на различные СЗИ и выделение на них финансовых ресурсов организацией можно предполагать известными натуральными числами.

В «стандартной» нечеткой задаче о ранце параметры системы ограничений также состоят из нечетких чисел, и основные риски получить на практике неоптимальное решение возникают из-за системы ограничений.

Несмотря на то, что в итоге для решения нечеткой задачи необходим перевод нечетких чисел в действительные числа (процесс дефаззификации), сделать это можно различными способами, см. [19]– [22], но желательно так, чтобы нечеткость, присутствующая в исходной задаче, играла бы значимую роль при нахождении оптимального или близкого к оптимальному решения. Практическая необходимость привлечения нечетких чисел во многие математические модели оказала влияние на идеи и статьи многих исследователей. Нечеткая задача о ранце и ее возможные методы решения описываются в работах [22]– [25] и многих других.

Применение методов теории нечетких множеств к вопросам кибербезопасности рассматривалось в работе [26]. Задача внедрения СЗИ при нечетких параметрах целевой функции ранее рассматривалась в работе [27]. В этой работе система финансовых ограничений также задается четкими параметрами. Критерий имеет смысл оценки среднего предотвращенного ущерба при использовании выбранных средств защиты, его значение необходимо максимизировать. Нечеткие числа, используемые в задаче, непринципиально отличны от треугольных и трапецеивидных нечетких чисел.

Нетрудно видеть, что поставленная в настоящей статье задача отличается от известной задачи о замене оборудования [28], несмотря на схожесть по смыслу, так как финансовые ресурсы организации не тратятся на эксплуатацию СЗИ, у них не бывает износа и замена СЗИ может быть связана только с их «моральным старением», то есть отсутствием противодействия к новым типам и классам атак.

Задача внедрения СЗИ (с четкими параметрами), сведенная к задаче о ранце, ранее рассматривалась, в работах [29], [30]. В обеих статьях все параметры являются четкими числами.

В статье [29] рассмотрена задача оптимального выбора средств защиты от угроз безопасности вычислительной сети предприятия. Математическая постановка задачи выполнена для оптимизации двух показателей качества: максимизации возможного среднего предотвращенного ущерба при ограничении на затраты; минимизации затрат при ограничении на возможный средний предотвращенный ущерб. Задача оптимального выбора средств защиты относится к классу задач булева нелинейного программирования, для решения которой применен оптимизационно-имитационный подход.

В работе [30] также исследуется задача о замене СЗИ, но с целью предупреждения его отказа. В ней требуется определить оптимальный интервал между последовательными заменами оборудования, при котором минимизируются средние затраты на единицу времени. Кроме того, обсуждается задача замены оборудования с учетом приведения затрат.

Выбор оптимального состава оборудования различного назначения для беспилотных летательных аппаратов описывается в работе [31]. В ней рассматриваются два аддитивных критерия для БМЗР.

С каждым годом публикуются новые алгоритмы решения многокритериальной многомерной задачи о ранце (ММЗР), которые с той или иной точки зрения эффективнее, чем предыдущие, в том числе с использованием нового программного обеспечения. В настоящее время для решения четких БМЗР используются универсальные оптимизационные пакеты (солверы). Солверы – специализированное ПО для поиска оптимальных решений, инструменты, позволяющие моделировать задачу и находить точные или приближенные решения.

1. **IBM CPLEX (с расширением DOcplex)**: Поддерживает многокритериальную оптимизацию. Позволяет задавать несколько целевых функций с раз-

ными весами или приоритетами для бикритериальных задач.

2. **Google OR-Tools**: Мощный open-source инструмент от Google. Модуль MPSolver или CP-SAT эффективен для многомерных ограничений задачи о ранце.

3. **Gurobi Optimizer**: Быстрый коммерческий солвер со встроенным функционалом работы с многокритериальными моделями.

О прогрессе солверов за период 2001–2020 гг. можно ознакомится в работе [32]. О сравнении различных решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования смотри, например, [33].

Как правило, некоммерческие солверы решают многомерную задачу о ранце с критериями аддитивного типа. Так как в настоящей статье рассматривается БМЗР со сверткой аддитивного и максиминного критериев, в статье предложен алгоритм, в котором решение вспомогательных однокритериальных многомерных задач о ранце с аддитивным критерием реализовано на базе библиотеки SciPy, а учет максиминного критерия идет в процессе работы алгоритма. Это позволяет решить поставленную четкую БМЗР, полученную после деффазификации нечетких параметров в исходной задаче. Приведен пример работы алгоритма при нахождении оптимального вектора и теорема, доказывающая его корректность.

Исследуемая в настоящей статье задача о кибербезопасности отличается от вышеупомянутых, является новой и с практической точки зрения рекомендуется для ознакомления начальнику отдела компьютерной безопасности коммерческой организации с целью использования ее при внедрении новых СЗИ для ГИА. Для удобства его работы приведен авторский алгоритм, которому присущи невысокий уровень сложности и доступность реализации.

1. Задача о внедрении СЗИ

В коммерческой организации имеется m ($m \geq 2$) ГИА, которые нуждаются в СЗИ. Имеется возможность выбрать их из n ($n \geq 2$) различных СЗИ, которые не конфликтуют между собой. Все n видов СЗИ приобрести невозможно в виду финансовых ограничений. Приобретенное СЗИ ставится на все ГИА организации. Пусть переменная x_j, $j = \overline{1,n}$, принимает значение 1, если j-ое СЗИ приобретено, и 0, если нет. Они образуют вектор $x = (x_1, ..., x_n)^T$.

Назовем «взломом» цепочку действий процессов поиска и эксплуатации уязвимостей хакерской программы для обхода механизмов СЗИ. Предположим, что хакерам необходимо осуществить последовательный взлом всех СЗИ, приобретенных организацией. Параметры $\widetilde{c}_j$, $j = \overline{1,n}$, являются положительными ТНЧ (левая граница ТНЧ больше нуля) и определяют время взлома j-го СЗИ (его можно знать лишь приблизительно). Параметры $\widetilde{d}_j$, $j = \overline{1,n}$, являются неотрицательными ТНЧ (левая граница ТНЧ не меньше нуля) и определяют возможное время реагирования отдела безопасности на «перехват» хакерской атаки при взломе j-го СЗИ, если этот СЗИ может определить попытки своего взлома; эти параметры также можно знать лишь приблизительно. Если j-ый СЗИ не может в принципе определить наличие попыток своего взлома, то параметр $\widetilde{d}_j = (0, 0, 0)$.

ТНЧ – это вид нечеткого числа $\widetilde{g}$, описываемый тройкой чисел $\widetilde{g} = (g_1, g_2, g_3)$, где действительные числа $g_1 \le g_2 \le g_3$. ТНЧ представляет собой диапазон возможных значений с четко определенной модой g_2 и «граничными» значениями g_1, g_3; функция принадлежности имеет вид

$$\mu_{\widetilde{g}}(x) = \begin{cases} 0, & x \le g_1,\ x \ge g_3, \\ \frac{x-g_1}{g_2-g_1}, & g_1 < x < g_2, \\ 1, & x = g_2, \\ \frac{g_3-x}{g_3-g_2}, & g_2 < x < g_3. \end{cases}$$

Отметим, что для корректности задачи необходимо, чтобы для всех $j = \overline{1,n}$ правая граница $\widetilde{d}_j$ не превышала левой границы $\widetilde{c}_j$ (условие корректности).

Элементы матрицы A размером $m \times n$ – натуральные числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, определяют стоимость в рублях j-го СЗИ для i-ой ГИА. Для обеспечения защиты коммерческая организация готова потратить на i-ую ГИА b_i рублей, b_i, $i = \overline{1,m}$, – натуральные числа, вектор $b = (b_1, ..., b_m)^T$; будем считать, что

$$\max_{j=\overline{1,n}} a_{ij} \le b_i, \quad \text{для всех } i = \overline{1,m}. \tag{1}$$

Неравенства (1) означают, что организация может приобрести любое СЗИ из n представленных. Таким образом, финансовые ограничения можно записать в виде системы линейных неравенств

$$Ax \le b. \tag{2}$$

В некоторых организациях на СЗИ выделяют общую сумму для всех ГИА, тогда система неравенств (2) перейдет в неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j \le B, \tag{3}$$

где $A_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$, B – общая сумма, выделенная на СЗИ. В этом случае задача становится скалярной.

Сформулируем два критерия, которые необходимо максимизировать для решения оптимизационной задачи внедрения СЗИ в коммерческой организации.

Критерий 1 (аддитивный). Максимизировать целевую функцию $\widetilde{F}_1(x)$ – общее время взлома всех поставленных СЗИ:

$$\widetilde{F}_1(x) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_j x_j \to \max. \tag{4}$$

Критерий 2 (максиминный). Максимизировать целевую функцию $\widetilde{F}_2(x)$ – минимальное время предполагаемого противодействия отдела компьютерной безопасности на обнаружение взлома поставленного СЗИ:

$$\widetilde{F}_2(x) = \min_{x_j=1,\, j=\overline{1,n}} \widetilde{d}_j x_j \to \max. \tag{5}$$

Максиминный критерий можно также интерпретировать следующим образом: по возможности не покупать конкретное СЗИ, если оно предоставляет малое время реагирования на хакерские атаки.

Будем рассматривать задачу максимизации свертки критериев

$$\widetilde{F}(x) = \lambda \widetilde{F}_1(x) + (1-\lambda)\widetilde{F}_2(x) \to \max, \tag{6}$$

где $\lambda \in [0,1]$. Выбор числа λ осуществляет лицо, принимающее решение (ЛПР), – начальник отдела компьютерной безопасности организации в зависимости от его представлений о приоритетах защиты информации. О сравнении ТНЧ см., например, [17].

Для решения нечеткой задачи необходимо применить дефаззификацию нечетких чисел, представив их в виде четкого эквивалента. В интерпретации математической модели ТНЧ присутствуют только в целевых функциях, что дает возможность бесконфликтно применить дефаззификацию одним из способов, описанных в [19]– [22].

2. Четкая математическая модель

В рамках теории нечетких множеств решение задачи предполагает переход к четким значениям. Предположим, что одним из способов проведена дефаззификация нечетких параметров целевых функций. Опишем изменения в математической модели. Обозначим $c_j = D(\widetilde{c}_j)$, $d_j = D(\widetilde{d}_j)$, $j = \overline{1,n}$, где $D(\widetilde{g})$ – дефаззификация ТНЧ $\widetilde{g}$. Из условия корректности следует, что $d_j \le c_j$, $j = \overline{1,n}$, а так как $\widetilde{d}_j$ – неотрицательные ТНЧ, то $d_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$, [19].

Тогда целевые функции критериев можно переписать в виде

$$F_1(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{7}$$

$$F_2(x) = \min_{x_j=1,\, j=\overline{1,n}} d_j x_j \to \max\,. \tag{8}$$

Без ограничения общности можно поменять нумерацию СЗИ так, чтобы при $k < l$ выполнялось неравенство: $d_k \ge d_l$, то есть последовательность d_j была бы невозрастающей.

Метод решения задачи (2), (7), (8) приведен в статье [12].

Пусть максимизации подлежит аналог (6) – свертка критериев (7), (8):

$$F(x) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda)F_2(x) \to \max, \tag{9}$$

где $\lambda \in [0,1]$. Метод решения задачи (2), (9) подробно описан в [13].

Если $\lambda = 0$, то оптимальным решением будет вектор $x = (1,0,...,0)^T$, $F(x) = d_1$; Данный вектор является допустимым решением системы ограничений (1) (или (2)). Далее считаем, что $\lambda \in (0,1]$.

Определенную сложность составляет найти некоммерческий солвер, который бы решал задачу (2), (9), один из критериев которой является максиминным. Авторами настоящей статьи предлагается алгоритм решения БМЗР, представленной выше.

Вычислительная реализация алгоритма выполнена на языке Python в облачной среде Google Colab – бесплатного облачного сервиса на базе Jupyter Notebook, позволяющего писать и выполнять код на Python прямо в браузере. Для решения задач линейного программирования использовался модуль scipy.optimize, в частности функция linprog со встроенным высокопроизводительным решателем HiGHS. В библиотеке SciPy отсутствуют специализированные встроенные алгоритмы для решения ММЗР. В связи с этим предложенный ниже алгоритм базируется на поиске решений нескольких многомерных задач о ранце с одним аддитивным критерием и последующим отбором из них оптимального вектора для свертки критериев (9) методом полного перебора. Входные данные для Google Colab можно задать текстовым файлом несложной конструкции или ввести вручную.

Примечание: стандартное программное обеспечение по умолчанию производит вычисления в целых числах (тип данных `int`). В рассматриваемом случае из-за дробного значения параметра λ приходится работать с вещественными величинами, что требует явного объявления типа данных `float` для параметров критериев (7), (8) и самого коэффициента λ.

3. Алгоритм для оптимизационной задачи со сверткой критериев

Алгоритм

1. Пусть V – пустое множество. Решить задачу (2), (7) (здесь и далее однокритериальная многомерная задача о ранце с аддитивным критерием решается в среде Google Colab) и получить оптимальное решение – n-мерный бинарный вектор x^0, который затем помещается в множество V. Если $\lambda = 1$, то вектор x^0 будет оптимальным решением. В этом случае алгоритм окончен.

2. Далее считаем, что $\lambda \in (0, 1)$. Пусть j_0 – номер в полученном оптимальном решении x^0, для которого

$$j_0 = \{\max j : x_j^0 = 1,\ j = \overline{1, n}\},$$

то есть $x_j^0 = 0$, $j = \overline{j_0 + 1, n}$.

3. Решить $j_0 - 1$ задач о ранце. Число СЗИ в s-ой задаче ($s = \overline{1, j_0 - 1}$): $j_0 - s$. Имеются в виду СЗИ с номерами от 1 до $j_0 - s$. Финансовые ограничения принимают вид

$$A_s x \le b, \tag{10}$$

где матрица A_s размером $m \times (j_0 - s)$ получена из матрицы A вычеркиванием последних $n - j_0 + s$ столбцов. Введем критерии

$$\begin{gathered} F^{(s)}(x) = \lambda \sum_{j=1}^{j_0-s} c_j x_j + (1-\lambda) d_{j_0-s} x_{j_0-s} = \\ = \sum_{j=1}^{j_0-s-1} \lambda c_j x_j + (\lambda c_{j_0-s} + (1-\lambda) d_{j_0-s}) x_{j_0-s} \to \max, \quad s = \overline{1, j_0 - 1}. \end{gathered} \tag{11}$$

При фиксированном s критерий (11) является аддитивным.

Для всех натуральных s, $s = \overline{1, j_0 - 1}$, решить задачу о ранце (10), (11) (всего $j_0 - 1$ задачу), то есть получить оптимальное решение – $(j_0 - s)$-мерный бинарный вектор x^s. Привести его к n-мерному бинарному вектору, дополнив отсутствующие компоненты справа нулями, и поместить в множество V. Оставить прежнее обозначение x^s. Нетрудно видеть, что при этом значение $F^{(s)}(x^s)$ не изменится.

4. В итоге множество V будет содержать j_0 n-мерных векторов x^s, $s = \overline{0, j_0 - 1}$, $j_0 \le n$. Методом полного перебора выбрать из них оптимальный вектор для критерия (9).

Этот алгоритм также подходит для решения скалярной задачи о ранце (3), (9).

Теорема 1. *Вышеприведенный алгоритм позволяет получить оптимальный бинарный вектор для задачи (2), (9) при* $\lambda \in (0, 1)$.

Доказательство. Пусть $\overline{x} = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)^T$ – оптимальный бинарный вектор (или один из оптимальных) для задачи (2), (9). Пусть

$$\overline{j}_0 = \{\max j : \overline{x}_j = 1,\ j = \overline{1, n}\},$$

то есть $\overline{x}_j = 0$, $j = \overline{\overline{j}_0 + 1, n}$. Тогда

$$F(\overline{x}) \ge F(x^0) \iff$$

$$\iff \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x}_j + (1 - \lambda) d_{\overline{j}_0} \overline{x}_{\overline{j}_0} \ge \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 + (1 - \lambda) d_{j_0} x_{j_0}^0. \tag{12}$$

Но вектор x^0 – оптимальный вектор для задачи (2), (7), поэтому

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x}_j \le \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0,$$

следовательно, учитывая (12), $d_{\overline{j}_0} \ge d_{j_0}$. Если $d_{\overline{j}_0} = d_{j_0}$, то

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0.$$

Отсюда следует, что $F(x^0) = F(\overline{x})$, а вектор x^0 – оптимальный вектор для задачи (2), (9).

Предположим $d_{\overline{j}_0} > d_{j_0} \Rightarrow \overline{j}_0 < j_0$. Пусть

$$s_0 = j_0 - \overline{j}_0, \tag{13}$$

$1 \le s_0 \le j_0 - 1$.

Рассмотрим оптимальный вектор $x^{s_0} \in V$ для задачи (10), (11) при $s = s_0$. По построению для параметра s_0: $x_j^{s_0} = 0$, $j = \overline{j_0 - s_0 + 1, n}$. Пусть

$$j_{s_0} = \{\max j : x_j^{s_0} = 1,\ j = \overline{1, n}\},$$

Отметим, что согласно (13) верно равенство $\overline{j}_0 = j_0 - s_0$, поэтому $j_{s_0} \le j_0 - s_0 = \overline{j_0}$, что равносильно

$$d_{j_{s_0}} \ge d_{j_0 - s_0} = d_{\overline{j}_0}. \tag{14}$$

Обозначим $\overline{x}^s$ – $(j_0 - s)$-мерный вектор, состоящий из первых $j_0 - s$ компонент вектора $\overline{x}$, тогда из условий оптимальности вектора $\overline{x}$ в задаче (2), (9) и оптимальности вектора x^{s_0} в задаче (10), (11) при $s = s_0$, а также очевидного равенства $F^{(s_0)}(\overline{x}^{s_0}) = F(\overline{x})$, получим:

$$F^{(s_0)}(x^{s_0}) \geq F^{(s_0)}(\overline{x}^{s_0}) = F(\overline{x}) \geq F(x^{s_0}), \tag{15}$$

то есть $F^{(s_0)}(x^{s_0}) \geq F(x^{s_0})$, а значит

$$\lambda \sum_{j=1}^{j_0-s_0} c_j x_j^{s_0} + (1-\lambda) d_{j_0-s_0} x_{j_0-s_0}^{s_0} \geq \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{s_0} + (1-\lambda) d_{j_{s_0}} x_{j_{s_0}}^{s_0}. \tag{16}$$

Но по построению,

$$\sum_{j=1}^{j_0-s_0} c_j x_j^{s_0} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{s_0},$$

поэтому из неравенства (16) следует неравенство

$$d_{j_0-s_0} x_{j_0-s_0}^{s_0} \geq d_{j_{s_0}} x_{j_{s_0}}^{s_0} \iff d_{\overline{j}_0} x_{j_0-s_0}^{s_0} \geq d_{j_{s_0}}.$$

Если $x_{j_0-s_0}^{s_0} = 0$, то $d_{j_{s_0}} = 0$, а значит вследствие (14): $d_{\overline{j}_0} = 0$, но $d_{\overline{j}_0} > d_{j_0} \geq 0$, противоречие. Если $x_{j_0-s_0}^{s_0} = 1$, то $d_{\overline{j}_0} \geq d_{j_{s_0}}$. С учетом (14) получим, что $d_{\overline{j}_0} = d_{j_{s_0}}$. Кроме того, так как $x_{j_0-s_0}^{s_0} = 1$, то $j_{s_0} = j_0 - s_0$, а нестрогое неравенство (16) обратится в равенство. Тогда все значения функций в (15) равны и верно равенство

$$F(\overline{x}) = F(x^{s_0}).$$

Следовательно вектор x^{s_0} – оптимальный вектор для задачи (2), (9).

Поэтому оптимальный вектор находится среди векторов, принадлежащих множеству V, и для его нахождения достаточно произвести полный перебор, то есть подставить векторы, принадлежащие множеству V: x^0 и x^s, $s = \overline{1, j_0 - 1}$, в критерий (9) и найти его максимум. Конец доказательства. □

Пример.

Пусть матрица A и вектор b в системе ограничений (2) выглядят так:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 5 & 4 & 3 \\ 27 & 18 & 12 & 6 & 6 \\ 40 & 25 & 12 & 11 & 8 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 39 \\ 48 \end{pmatrix}.$$

Параметры целевых функций в критерии (9): $\lambda = 0.5$;
$c_1 = 90$, $c_2 = 76$, $c_3 = 30$, $c_4 = 35$, $c_5 = 30$;
$d_1 = 40$, $d_2 = 20$, $d_3 = 14$, $d_4 = 12$, $d_5 = 10$.
Шаги работы алгоритма показаны в Таблице 1.
Оптимальное решение: $\overline{x} = x^0 = (0, 1, 1, 1, 0)$; максимум $F(x^0) = 76.5$.

В рамках используемой вычислительной реализации возможно создание отдельного программного блока отбора оптимального решения. Однако в настоящей

Таблица 1: *Таблица работы алгоритма*

s	j_s	размер матрицы ограничений	x^s (Google Colab)	$F(x^s)$
0	4	3×5	(0,1,1,1,0)	76.5
1	3	3×3	(0,1,1,0,0)	60
2	2	3×2	(0,1,0,0,0)	48
3	1	3×1	(1,0,0,0,0)	65

работе основное внимание уделено формированию готового инструмента, обеспечивающего решение задачи при изменении пользователем исходных данных.

Заключение

В работе рассмотрена задача внедрения неконфликтующих между собой СЗИ различных классов в инфраструктуру коммерческой организации. Задача исследуется для аддитивного и максиминного критериев в условиях нечеткости исходных параметров. Нечеткость обусловлена невозможностью определения точного времени обхода каждого СЗИ хакерской группировкой и отсутствием полной информации о допустимом времени, которое имеется у отдела безопасности при реагировании на хакерскую атаку СЗИ. Исходная нечеткая задача была сведена к своему четкому аналогу. Математическая модель четкой задачи приводит к БМ-ЗР со сверткой аддитивного и максиминного критериев. Проведен краткий обзор близких задач по тематике. Даны ссылки на алгоритмы ее решения. Разработан алгоритм, решающий поставленную задачу, доказана его корректность и представлен пример его работы. Постановка модели непосредственно отражает специфику практической задачи, стоящей перед ЛПР – начальником отдела кибербезопасности коммерческой организации. Рассмотренная задача, ее математическая модель и предложенный алгоритм могут являться основой для разработки системы поддержки принятия решений в области корпоративной информационной безопасности.

Список литературы

[1] Малюк А.А. Защита информации в информационном обществе. Учебное пособие для вузов. М.: Горячая линия - Телеком, 2020. 229 с.

[2] Брюханов В.А., Грызунов В.В., Шестаков А.В. Выявление проблем информационной безопасности методом систематического обзора литературы // Вестник Санкт-Петербургского университета ГПС МЧС России. 2024. № 1. С. 104–122.

[3] Trenchev I., Dimitrov W., Dimitrov G., Ostrovska T., Trencheva M. Mathematical Approaches Transform Cybersecurity from Protoscience to Science // Applied Sciences. 2023. Vol. 13, № 11. ID 6508. https://doi.org/10.3390/app13116508

[4] Надеждин Е.Н. Выбор механизма защиты информационной сети на основе метода дискретного программирования // Наукосфера. 2024. № 1-1. С. 184–190.

[5] Сизов В.А., Дрожкин А.А. Моделирование экономики информационной безопасности субъекта экономической деятельности на основе симплекс-метода // Вестник Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова. 2021. Т. 18, № 1(115). С. 173–178. https://doi.org/10.21686/2413-2829-2021-1-173-178

[6] Бураго П.Н., Хранилов В.П., Эгамов А.И. Стратегия управления ресурсом информационной безопасности корпоративных проблемно-ориентированных компьютерных систем // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2024. № 3(146). С. 7–13.

[7] Khranilov V.P., Burago P.N., Egamov A.I. Mathematical Model DDS for Information Security Management of the Organization // E3S Web of Conferences. 2024. № 537. ID 09009. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202453709009

[8] Rainer B., Dell'Amico M., Martello S. Assignment problems. USA, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009. 382 p.

[9] Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969. 368 с.

[10] Martello S., Toth P. Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementation. Chichester: John Wiley and Sons, 1990. 308 p.

[11] Коган Д.И. Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация. Нижний Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2005. 260 с.

[12] Лейкин М.В. Многокритериальная задача о ранце с дополнительными диапазонными и точечными критериями // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. 2004. № 9. С. 39–49.

[13] Меламед И.И., Сигал И.Х., Владимирова Н.Ю. Исследование линейной свертки критериев в бикритериальной задаче о ранце // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т. 39, № 5. С. 753–758.

[14] Freville A. The multidimensional 0–1 knapsack problem: An overview // European Journal of Operational Research. 2004. Vol. 155, № 1. Pp. 1–21.

[15] Laabadi S., Naimi M., El Amri H., Achchab B. The 0/1 Multidimensional Knapsack Problem and Its Variants: A Survey of Practical Models and Heuristic Approaches // American Journal of Operations Research. 2018. Vol. 8, № 5. Pp. 395–439.

[16] Bansal A. Trapezoidal fuzzy numbers (a, b, c, d): arithmetic behavior // International Journal of Physical and Mathematical Sciences. 2011. Vol. 2, № 1. Pp. 39–44.

[17] Ухоботов В.И., Стабулит И.С., Кудрявцев К.Н. Сравнение нечетких чисел треугольного вида // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29, № 2. С. 197–210.

[18] Леденева Т.М., Медведев С.Н. О нечёткой задаче о назначениях // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2012. № 2. С. 154–157.

[19] Van Leekwijck W., Kerre E. Defuzzification: Criteria and Classification // Fuzzy Sets and Systems. 1999. Vol. 108. Pp. 159–178. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00337-0

[20] Gilda K.S., Satarkar S.L. Analytical overview of defuzzification methods // International Journal of Advance Research, Ideas and Innovations in Technology. 2020. Vol. 6, № 2. Pp. 359–365.

[21] Леденева Т.М., Черменев Д.А. Влияние методов дефаззификации на нечеткую классификацию // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2012. Т. 8, № 8. С. 24–27.

[22] Niksirat M., Nasseri H. Knapsack problem in fuzzy nature: different models based on credibility ranking method // Yugoslav Journal of Operations Research. 2022. Vol. 32, № 2. Pp. 203–218.

[23] Kasperski A., Kulej M. The 0-1 knapsack problem with fuzzy data // Fuzzy Optimization and Decision Making. 2007. Vol. 6, № 2. Pp. 163–172.

[24] Donets G.A., Yemets A.O. The statement and solution of the knapsack problem with fuzzy data // Journal of Automation and Information Sciences. 2009. Vol. 41, № 9. Pp. 1–13.

[25] Singh V.P. An approach to solve fuzzy knapsack problem in investment and business model // Networked Business Models in the Circular Economy. Eds. by B. Nogalski, A. Szpitter, A. Jablonski, M. Jablonski. Hershey: IGI Global, 2020. Pp. 154–173.

[26] Братченко А.И., Бутусов И.В., Кобелян А.М., Романов А.А. Применение методов теории нечетких множеств к оценке рисков нарушения критически важных свойств защищаемых ресурсов автоматизированных систем управления // Вопросы кибербезопасности. 2019. Т. 29, № 1. С. 18–24.

[27] Быков А.Ю., Гуров А.В. Задача выбора средств защиты информации от атак в автоматизированных системах при нечетких параметрах функции цели // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. № 1(1). ID 39.

[28] Логиновский О.В., Гельруд Я.Д., Голлай А.В. Применение детерминированных и стохастических моделей для замены оборудования промышленных предприятий // Проблемы управления. 2019. № 4. С. 58–64.

[29] Овчинников А.И., Журавлев А.М., Медведев Н.В., Быков А.Ю. Математическая модель оптимального выбора средств защиты от угроз безопасности вычислительной сети предприятия // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Приборостроение. 2007. № 3. С. 115–121.

[30] Клименко И.С. Исследование операций в комплексной защите инфокоммуникационных объектов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2021. № 2. С. 369–375.

[31] Моисеев В.С., Новикова С.В., Валитова Н.Л., Кремлева Э.Ш. О методе комплектования БПЛА бортовым оборудованием с использованием Парето-оптимизации и экспертных решений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2025. № 3. С. 59–77.

[32] Koch T., Berthold T., Pedersen J., Vanaret C. Progress in mathematical programming solvers from 2001 to 2020 // EURO Journal on Computational Optimization. 2022. № 10. ID 100031.

[33] Ignatov A.N., Ivanov S.V. Comparing the solvers for the mixed integer linear programming problems and the software environments that call them // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2024. Т. 17, № 3. С. 57–72.

Образец цитирования

Бураго П.Н., Тростин В.Л., Хранилов В.П., Эгамов А.И. Нечеткая задача о внедрении средств защиты информации, описываемая бикритериальной многомерной задачей о ранце // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 1. С. 60–78. https://doi.org/10.26456/vtpmk763

Сведения об авторах

1. **Бураго Павел Николаевич**
аспирант кафедры «Компьютерные технологии в проектировании и производстве» Института радиоэлектроники и информационных технологий НГТУ имени Р.Е. Алексеева.

Россия, 603155, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24, НГТУ имени Р.Е. Алексеева. E-mail: burago.pasha@yandex.ru

2. **Тростин Василий Львович**
доцент кафедры математических и естественно-научных дисциплин технологического факультета Института Пищевых Технологий и Дизайна.

Россия, 603062, г. Нижний Новгород, ул. Горная, д. 13, Институт Пищевых Технологий и Дизайна. E-mail: kaf.esnd@yandex.ru

3. **Хранилов Валерий Павлович**
профессор кафедры «Компьютерные технологии в проектировании и производстве» Института радиоэлектроники и информационных технологий НГТУ имени Р.Е. Алексеева.

Россия, 603155, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24, НГТУ имени Р.Е. Алексеева. E-mail: hranilov@nntu.ru

4. **Эгамов Альберт Исмаилович**
доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики ННГУ имени Н.И. Лобачевского.

Россия, 603022, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского. E-mail: albert810@yandex.ru

THE FUZZY PROBLEM OF DEPLOYMENTING INFORMATION SECURITY TOOLS DESCRIBED BY THE BICRITERIAL MULTIDIMENSIONAL KNAPSACK PROBLEM

Burago P.N.*, Trostin V.L., Khranilov V.P.*, Egamov A.I.*****

*Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod

**Institute of Food Technology and Design, Nizhny Novgorod

***Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod

Received 22.01.2026, revised 09.03.2026.

The paper is devoted to one of the most urgent and important problems of the 21st century, namely, the problem of cybersecurity. A fuzzy mathematical model for deploying information security tools for groups of information assets in a commercial organization is presented. Within the framework of fuzzy set theory it assumes a transition to a crisp problem, which is a bicriterial multidimensional knapsack problem with additive and maximin criteria; the convolution of these criteria is maximized. To solve it, the author's algorithm is proposed, which relies on delegating of search for optimal solutions to auxiliary single-criterion multidimensional knapsack problems to the specialized Google Colaboratory cloud service. The correctness of the algorithm is proved.

Keywords: cybersecurity, information security tools, groups of information assets, bypass time, knapsack problem, defuzzification, triangular fuzzy number.

Citation

Burago P.N., Trostin V.L., Khranilov V.P., Egamov A.I., “The fuzzy problem of deploymenting information security tools described by the bicriterial multidimensional knapsack problem”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2026, № 1, 60–78 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk763

References

[1] Malyuk A.A., *Zashchita informatsii v informatsionnom obshchestve [Information Protection in the Information Society]*, Textbook for Universities, Goryachaya liniya - Telekom, Moscow, 2020 (in Russian), 229 pp.

[2] Bryukhanov V.A., Gryzunov V.V., Shestakov A.V., “Identification of information security problems using the method of systematic literature review”, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta GPS MChS Rossii [Bulletin of Saint Petersburg University of State Fire Service of EMERCOM of Russia]*, 2024, №1, 104–122 (in Russian).

[3] Trenchev I., Dimitrov W., Dimitrov G., Ostrovska T., Trencheva M., "Mathematical Approaches Transform Cybersecurity from Protoscience to Science", *Applied Sciences*, **13**:11 (2023), 6508, https://doi.org/10.3390/app13116508.

[4] Nadezhdin E.N., "Choosing a mechanism for protecting an information network based on the discrete programming method", *Naukosfera [Sciencosphere]*, 2024, № 1-1, 184–190 (in Russian).

[5] Sizov V.A., Drozhkin A.A., "Modeling the economy of information security of an economic entity based on the simplex method", *Vestnik Rossijskogo ekonomicheskogo universiteta imeni G.V. Plekhanova [Bulletin of the Plekhanov Russian University of Economics]*, **18**:1(115) (2021), 173–178 (in Russian), https://doi.org/10.21686/2413-2829-2021-1-173-178.

[6] Burago P.N., Khranilov V.P., Egamov A.I., "Strategy for managing information security resources of corporate problem-oriented computer systems", *Trudy NGTU im. R.E. Alekseeva [Proceedings of Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev]*, 2024, № 3(146), 7–13 (in Russian).

[7] Khranilov V.P., Burago P.N., Egamov A.I., "Mathematical Model DDS for Information Security Management of the Organization", *E3S Web of Conferences*, 2024, № 537, 09009, https://doi.org/10.1051/e3sconf/202453709009.

[8] Rainer B., Dell'Amico M., Martello S., *Assignment problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, Philadelphia, 2009, 382 pp.

[9] Korbut A.A., Finkelshtejn Yu.Yu., *Diskretnoe programmirovanie [Discrete Programming]*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (in Russian), 368 pp.

[10] Martello S., Toth P., *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementation*, John Wiley and Sons, Chichester, 1990, 308 pp.

[11] Kogan D.I., *Dinamicheskoe programmirovanie i diskretnaya mnogokriterialnaya optimizatsiya [Dynamic Programming and Discrete Multi-Criteria Optimization]*, NNGU im. N.I. Lobachevskogo, Nizhnij Novgorod, 2005 (in Russian), 260 pp.

[12] Lejkin M.V., "Multi-criteria knapsack problem with additional range and point criteria", *Vestnik Volzhskoj gosudarstvennoj akademii vodnogo transporta [Bulletin of the Volga State Academy of Water Transport]*, 2004, № 9, 39–49 (in Russian).

[13] Melamed I.I., Segal I.H., Vladimirova N.Yu., "Investigation of linear convolution of criteria in a bicriteria knapsack problem", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **39**:5 (1999), 721–726.

[14] Freville A., "The multidimensional 0–1 knapsack problem: An overview", *European Journal of Operational Research*, **155**:1 (2004), 1–21.

[15] Laabadi S., Naimi M., El Amri H., Achchab B., "The 0/1 Multidimensional Knapsack Problem and Its Variants: A Survey of Practical Models and Heuristic Approaches", *American Journal of Operations Research*, **8**:5 (2018), 395–439.

[16] Bansal A., “Trapezoidal fuzzy numbers (a, b, c, d): arithmetic behavior”, *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*, **2**:1 (2011), 39–44.

[17] Ukhobotov V.I., Stabulit I.S., Kudryavtsev K.N., “Comparison of triangular fuzzy numbers”, *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye nauki [Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science]*, **29**:2 (2019), 197–210 (in Russian).

[18] Ledeneva T.M., Medvedev S.N., “On the fuzzy assignment problem”, *Vestnik Belgorodskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta im. V.G. Shukhova [Bulletin of Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov]*, 2012, № 2, 154–157 (in Russian).

[19] Van Leekwijck W., Kerre E., “Defuzzification: Criteria and Classification”, *Fuzzy Sets and Systems*, **108** (1999), 159–178, https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00337-0.

[20] Gilda K.S., Satarkar S.L., “Analytical overview of defuzzification methods”, *International Journal of Advance Research, Ideas and Innovations in Technology*, **6**:2 (2020), 359–365.

[21] Ledeneva T.M., Chermenev D.A., “Influence of defuzzification methods on fuzzy classification”, *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Bulletin of Voronezh State Technical University]*, **8**:8 (2012), 24–27 (in Russian).

[22] Niksirat M., Nasseri H., “Knapsack problem in fuzzy nature: different models based on credibility ranking method”, *Yugoslav Journal of Operations Research*, **32**:2 (2022), 203–218.

[23] Kasperski A., Kulej M., “The 0-1 knapsack problem with fuzzy data”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **6**:2 (2007), 163–172.

[24] Donets G.A., Yemets A.O., “The statement and solution of the knapsack problem with fuzzy data”, *Journal of Automation and Information Sciences*, **41**:9 (2009), 1–13.

[25] Singh V.P., “An approach to solve fuzzy knapsack problem in investment and business model”, *Networked Business Models in the Circular Economy*, eds. B. Nogalski, A. Szpitter, A. Jablonski, M. Jablonski, IGI Global, Hershey, 2020, 154–173.

[26] Bratchenko A.I., Butusov I.V., Kobelyan A.M., Romanov A.A., “Application of fuzzy set theory methods to risk assessment of violation of critically important properties of protected resources of automated control systems”, *Voprosy kiberbezopasnosti [Cybersecurity Issues]*, **29**:1 (2019), 18–24 (in Russian).

[27] Bykov A.Yu., Gurov A.V., “The problem of choosing means of protecting information from attacks in automated systems with fuzzy parameters of the objective function”, *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana [Bulletin of Bauman Moscow State Technical University]*, 2012, № 1(1), 39 (in Russian).

[28] Loginovskij O.V., Gelrud Ya.D., Gollaj A.V., “Application of deterministic and stochastic models for equipment replacement at industrial enterprises”, *Problemy upravleniya [Control Problems]*, 2019, № 4, 58–64 (in Russian).

[29] Ovchinnikov A.I., Zhuravlev A.M., Medvedev N.V., Bykov A.Yu., “Mathematical model of optimal choice of means of protection against security threats of the enterprise computer network”, *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya: Priborostroenie [Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Series: Instrument Making]*, 2007, № 3, 115–121 (in Russian).

[30] Klimenko I.S., “Proceedings of Tula State University. Technical Sciences”, *Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki [Proceedings of Tula State University. Technical Sciences]*, 2021, № 2, 369–375 (in Russian).

[31] Moiseev V.S., Novikova S.V., Valitova N.L., Kremleva E.Sh., “On the method of equipping UAVs with onboard equipment using Pareto optimization and expert solutions”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2025, № 3, 59–77 (in Russian).

[32] Koch T., Berthold T., Pedersen J., Vanaret C., “Progress in mathematical programming solvers from 2001 to 2020”, *EURO Journal on Computational Optimization*, 2022, № 10, 100031.

[33] Ignatov A.N., Ivanov S.V., “Comparing the solvers for the mixed integer linear programming problems and the software environments that call them”, *Vestnik YuUrGU. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie [Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical Modelling and Programming]*, **17**:3 (2024), 57–72 (in Russian).

Author Info

1. **Burago Pavel Nikolaevich**
Postgraduate student of the Department of Computer Technologies in Design and Production at the Institute of Radio Electronics and Information Technology, NSTU.

   Russia, 603155, Nizhny Novgorod, 24 Minin str., NGTU. E-mail: burago.pasha@yandex.ru

2. **Trostin Vasily Lvovich**
Associate Professor of the Department of Mathematical and Natural Sciences, Faculty of Technology, Institute of Food Technology and Design.

   Russia, 603062, Nizhny Novgorod, 13 Gornaya str., Institute of Food Technology and Design. E-mail: kaf.esnd@yandex.ru

3. **Khranilov Valery Pavlovich**
Professor of the Department of Computer Technologies in Design and Production, Institute of Radio Electronics and Information Technologies, NSTU.

   Russia, 603155, Nizhny Novgorod, 24 Minin str., NGTU. E-mail: hranilov@nntu.ru

4. **Egamov Albert Ismailovich**
Associate Professor of the Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod.

Russia, 603022, Nizhny Novgorod, 23 Gagarin Ave, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod. E-mail: albert810@yandex.ru