УДК 004.021, 512.554.37, 519.17

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ РАСШИРЕНИЙ ГРАФА ПУТЁМ ОБЪЕДИНЕНИЯ ЕГО ИЗОМОРФНЫХ КОПИЙ

Лобов А.А.
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов

Поступила в редакцию 03.11.2025, после переработки 19.12.2025.

Гиперкуб является одной из классических топологий для построения сетей передачи информации. Изучению гиперкубов и их свойств посвящено много работ. Известны и некоторые результаты, связанные с задачей построения отказоустойчивых реализаций. В 1993 году Харари и Хейз предложили схему построения оптимальных устойчивых к отказам рёбер реализаций произвольного гиперкуба. Позднее была доказана единственность предложенной ими схемы. На данный момент аналогичная схема для построения оптимальной устойчивой к отказу вершин реализации гиперкуба не найдена. Оптимальные устойчивые к отказам k узлов реализации графов называются минимальными вершинными k-расширениями. Для поиска минимальных вершинных k-расширений применяются различные численные методы. Известны результаты для 8-вершинного гиперкуба, но для 16-вершинного гиперкуба результат не был найден, даже с использованием вычислений на кластере. В данной работе предлагается новый подход к построению вершинных расширений графов. Обосновывается его корректность, а также описывается алгоритм, опирающийся на данный подход. Предлагаются и обосновываются оптимизации данного алгоритма на основе групп автоморфизмов. Предложенный алгоритм позволяет построить все минимальные вершинные 1-расширения 16-вершинного гиперкуба без применения кластера и суперкомпьютера.

Ключевые слова: граф, гиперкуб, вершинные расширения, отказоустойчивость.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 1. С. 79–88.
https://doi.org/10.26456/vtpmk759

Введение

Изучение графовых моделей отказоустойчивости берёт начало со статьи Хейза (J.P. Hayes) 1976 года [1]. Изначально рассматривались только отказы узлов, но позднее задача была разделена на две: в первой рассматривался отказ узлов (вершин графа) [2], во второй — отказ рёбер [3].

Приведём основные определения, которые используются в статье.

Декартовым произведением множеств A и B называется множество пар $A \times B = \{(a,b) | a \in A \ \& \ b \in B\}$.

Графом называется пара $G = (V, \alpha)$, где V — это множество вершин, а α — отношение смежности на множестве вершин, то есть $\alpha \subseteq V \times V$.

Пусть $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$.

Объединением графов G и H называется граф $G \cup H = (V \cup H, \alpha \cup \beta)$. Графы G и H могут иметь общие вершины.

Соединением графов G и H называется граф

$$G + H = (U \cup V, \alpha \cup \beta \cup (U \times V) \cup (V \times U)).$$

Граф G является подграфом графа H, что обозначается как $G \subseteq H$, если $V \subseteq U$ и $\alpha \subseteq \beta$.

n-вершинный граф, в котором каждая пара различных вершин смежна, называется полным и обозначается как K_n.

Графы G и H называются изоморфными, что обозначается как $G \cong H$, если $|V| = |U|$, и существует такое взаимно-однозначное отображение $\varphi : V \to U$, что $\forall (v_1, v_2 \in V)(((v_1, v_2) \in \alpha) \Leftrightarrow (\varphi(v_1), \varphi(v_2)) \in \beta)$, φ при этом называется изоморфизмом. Если $G = H$, то есть $V = U$ и $\alpha = \beta$, то φ называется автоморфизмом. Множество автоморфизмов графа G обозначается как $Aut(G)$.

В данной статье будет использоваться терминология из [4, 5].

Граф G^* называется вершинным k-расширением (сокращённо В-k-Р) n-вершинного графа G, если граф G вкладывается в каждый граф, получающийся из графа G^* удалением любых k вершин. Под вложением подразумевается изоморфное вложение (изоморфизм подграфу).

В-k-Р n-вершинного графа называется минимальным вершинным k-расширением (МВ-k-Р), если количество вершин в нём равно $n + k$ и количество рёбер минимально среди всех В-k-Р графа G с тем же числом вершин. Аналогично можно определить и минимальные рёберные k-расширения.

В работе [3] приведено решение для класса гиперкубов [6] задачи, связанной с отказом рёбер, однако в работе тех же авторов, спустя 3 года [2], вершинные расширения для данного класса описаны не были. Отметим, что позднее была доказана единственность минимального рёберного 1-расширения гиперкуба [7,8]. На текущий момент не существует доказанной схемы построения МВ-1-Р гиперкуба, но существует доказанная схема построения В-1-Р, которая описана в [9]. Упомянутая схема позволяет строить В-1-Р гиперкуба с числом рёбер, меньшим чем у тривиального расширения (то есть расширения, которое получается добавлением вершины и соединением её рёбрами со всеми остальными вершинами графа). Для исследования минимальности построенных графов можно использовать численные методы.

В [4, 5] описаны основные алгоритмы построения МВ-k-Р, которые в разных модификациях применяются в других работах. Варианты алгоритма 2.1.1 применялись в [10] и в [11] для построения расширений неориентированных графов и цветных неориентированных графов. В [12] применяется алгоритм 2.1.2 для подсчёта расширений циклов.

Все упомянутые алгоритмы можно объединить следующими шагами:

1. Выбирается область поиска расширений.

2. Строятся все графы из области поиска. Это обычно суперграфы с заданным числом рёбер или графы с заданными векторами степеней.

3. Среди построенных графов выбираются В-k-Р. Если было найдено хотя бы одно В-k-Р, то отобранные на данном шаге графы и являются результатом.

4. Если не было найдено ни одного расширения, то изменить область поиска и перейти на шаг 2. Обычно при изменении области поиска увеличивают число рёбер в суперграфе или меняют набор векторов степеней.

Особенностью данных подходов является обязательная проверка на соответствие определению В-k-Р, которая является NP-полной задачей [13].

1. Алгоритм построения расширений

Для построения МВ-k-Р в данной работе предлагается использовать новый подход, основанный на объединении графов, изоморфных G.

Лемма 1. *Каждое минимальное вершинное k-расширение графа G можно представить как объединение C_{n+k}^k изоморфных ему графов.*

Доказательство. Пусть G_k^* является МВ-k-Р графа G, тогда при удалении произвольных k вершин из G^* получится граф $G_{v_{i_1},v_{i_2},\dots,v_{i_k}} = G^* - v_{i_1} - v_{i_2} - \dots - v_{i_k}$, в который будет вкладываться G. Пусть само вложение будет $\psi_{v_{i_1},v_{i_2},\dots,v_{i_k}}$, тогда $\psi_{v_{i_1},v_{i_2},\dots,v_{i_k}}(G) \subseteq G_{v_{i_1},v_{i_2},\dots,v_{i_k}} \subseteq G^*$.

Объединяя такие графы, получим $\bigcup\limits_{u_{i_1},u_{i_2},\dots,u_{i_k}} \psi_{u_{i_1},u_{i_2},\dots,u_{i_k}}(G) \subseteq G^*$. Ввиду минимальности получим $\bigcup\limits_{u_{i_1},u_{i_2},\dots,u_{i_k}} \psi_{u_{i_1},u_{i_2},\dots,u_{i_k}}(G) = G_k^*$. Если это не так, то будет существовать ребро e, которое не входит ни в один из графов, участвующих в объединении, а значит, $G_k^* - e$ будет являться расширением того же типа с меньшим числом рёбер, что противоречит минимальности G^*.

□

Рассмотрим алгоритм построения МВ-k-Р, опирающийся на данный подход. Вход:

1. Граф $G = (V, \alpha)$ со множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$.

2. k — положительное целое число.

3. m_{start} — оценка сверху количества дополнительных рёбер в расширении.

Действия:

1. $V^* = \{1, \dots, n-1, n, \dots, n+k\}$ — множество вершин МВ-k-Р.

2. $\{V_1, \dots, V_{C_{n+k}^n}\} := \{X \subseteq V^* || X| = n\}$ все n-элементные подмножества множества V^*.

3. $m := m_{max}$ — верхняя граница для поиска.

4. $E := \emptyset$ — множество, в котором будут храниться найденные МВ-k-Р.
5. Для $G_1 = (V_1, \alpha_1), G_2 = (V_2, \alpha_2), \ldots, G_{C^n_{n+k}} = (V_{C^n_{n+k}}, \alpha_{C^n_{n+k}})$ — каждого различного набора изоморфных G графов:
   5.1. $H = G_1 \cup \cdots \cup G_{C^n_{n+k}}$ — расширение графа G.
   5.2. Если количество рёбер в H меньше m, то:
      5.2.1. $m :=$ количество рёбер в H — в МВ-k-Р рёбер не больше, чем в H, поэтому сдвигаем границу для поиска до числа рёбер в H.
      5.2.2. $E := \emptyset$ — в данном множестве все графы были с большим числом рёбер, они не минимальные.
   5.3. Если количество рёбер в H равно m и в E нет изоморфных H графов, то: $E := E \cup \{H\}$.
6. Результатом является множество E, которое содержит все МВ-k-Р графа G.

В алгоритме отсутствует проверка на соответствие определению расширения, но перебор на 5-ом шаге являетя очень большим.

Если в графе G ровно n вершин и строится вершинное k-расширение, то в данном пункте должно быть построено $(n!)^{C^n_{n+k}}$ вариантов ($n!$ — это количество перестановок вершин, C^n_{n+k} — это количество перебираемых изоморфных графов).

Объём перебора можно уменьшить, зафиксировав изоморфизм первого графа.

Лемма 2. *Количество неизоморфных расширений, найденных алгоритмом, не изменится, если зафиксировать* $G_1 = (V_1, \alpha_1)$.

Доказательство. Пусть вместо G_1 при построении МВ-k-Р графа H использовался граф $G'_1 = (V_1, \alpha'_1)$ такой, что $G_1 \cong G'_1$, а сам изоморфизм обозначим через ϕ. Доопределим ϕ до ϕ' так, чтобы оставшиеся вершины $V^* \setminus V_1$ отображались в себя. Таким образом получим изоморфизм двух МВ-k-Р графа H, в одном из которых по построению есть подграф $G_1 \subseteq (\phi')^{-1}(H)$. $\square$

Также в этом пункте при переборе графов, изоморфных графу G, рассматриваются только те, у которых фиксировано множество вершин, поэтому задача перебора изоморфных графов сводится к перебору различных отображений этого множества вершин на себя, что сводится к перебору всех перестановок элементов множества. Это можно делать постепенно с помощью обхода префиксного дерева перестановок, которое описано в конце следующего раздела.

Есть ограничение сверху на число рёбер в МВ-k-Р — количество рёбер в тривиальном В-k-Р графе G равно $G + K_k$.

Если известна часть изоморфизма, то можно определить, куда будут отображены некоторые вершины. Это даёт возможность на каждом промежуточном этапе узнать какие рёбра точно будут в объединении. Если их становится больше, чем в известном В-k-Р того же графа, то это означает, что получаемый ниже по ветви результат не будет минимальным. Также при обнаружении расширения с меньшим числом рёбер порог можно снизить (шаг 5.2.1 алгоритма), что приведёт к ещё большему сокращению области поиска.

Последнее, что нужно сделать — это убрать изоморфные копии расширений в списке построенных графов (пункт 5.3).

2. Использование автоморфизмов для оптимизации

Среди различных изоморфизмов могут встречаться такие, что будут давать один и тот же результат. Пусть даны два изоморфизма $\phi, \psi : \phi \neq \psi$. Будем называть их равнозначными, если $\phi(G) = \psi(G)$.

Пусть $\alpha \in Aut(G)$ является автоморфизмом графа G, тогда для любого изоморфизма $\phi : V \to U$ преобразование $\alpha \circ \phi$ равнозначно ϕ, так как $(\alpha \circ \phi)(G) = \phi(\alpha(G)) = \phi(G)$.

Для уменьшения перебора необходимо из всех равнозначных преобразований оставить одно. Решим задачу методом канонических представителей [14]. В качестве канонического представителя класса равнозначных перестановок выберем лексикографически наименьшую из них. Порядок будем определять нижней частью перестановки при упорядоченной верхней части по возрастанию.

Если известно множество всех автоморфизмов $Aut(G)$ и изоморфизм ϕ, то множество равнозначных преобразований можно получить домножением слева на все возможные автоморфизмы графа G: $H = \{\alpha \circ \phi \mid \alpha \in Aut(G)\}$. Других подобных преобразований нет, так как для любого ψ: $\psi(G) = F$, $F = \psi(G) = \psi(id(G))$, то есть $\psi = id \circ \psi$, а $id \in Aut(G)$, поэтому $\psi \in H$.

Рассмотрим пример действия автоморфизма $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ на произвольный изоморфизм $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ слева: $\alpha \circ \phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & x_6 & x_5 \end{pmatrix}$.

Произошла фиксированная перестановка элементов нижней части изоморфизма ϕ, задаваемая автоморфизмом.

Сравним лексикографический порядок нижних частей изоморфизмов ϕ и $\alpha \circ \phi$: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ и $(x_1, x_3, x_4, x_2, x_6, x_5)$. Так как изоморфизм является биективным преобразованием, то все образы различны, а значит, следует найти первый в последовательностях отличающийся элемент. В данном случае первый элемент в обеих последовательностях одинаков и равен x_1, а второй – различен, поэтому нужно сравнить x_2 и x_3. Если $x_2 > x_3$, то $\alpha \circ \phi < \phi$, следовательно, изоморфизм ϕ не является лексикографически минимальным, следовательно, он не канонический.

Если рассмотреть в таком ключе все существующие автоморфизмы, то можно получить ряд условий вида $x_i < x_j$, выполнение которых будет определять канонического представителя. При этом $i < j$, так как это первый номер элемента, который отличается в последовательностях, а значит, элементы с меньшими номерами были равны и уже задействованы для элементов с меньшими номерами, поэтому сравнение может идти только элементами, номера которых больше i.

Отношение меньше является отношением порядка, поэтому при наличии правил $x_i < x_j$ и $x_j < x_k$ правило $x_i < x_k$ будет выполняться из-за свойства транзитивности, значит, такая проверка будет избыточна и её можно исключить. Это правило даёт возможность уменьшить количество проверок.

Для проверки правила достаточно знать 2 элемента изоморфизма, поэтому сам изоморфизм можно строить постепенно. Для этого можно использовать обход префиксного дерева перестановок n-элементного множества образов изоморфизма. Такое дерево позволит постепенно строить изоморфизм и проверять правила сразу при появлении необходимых элементов. Если правило не выполнено для какого-то префикса изоморфизма, то оно не будет выполнено и для всех его потомков в дереве, так как в потомках данный префикс присутствует, поэтому такие узлы дерева можно не рассматривать. То есть происходит исключение из обхода всей ветви дерева.

Префиксное дерево в данном случае можно определить следующим образом:

1. Метка корня дерева — пустая последовательность.
2. Листы дерева помечены перестановками.
3. Узел с меткой $(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i)$, где $i > 0$, будет дочерним по отношению к узлу с меткой $(p_1, \ldots, p_{i-1})$.

Также при использовании такого дерева возможно постепенное построение объединения графов. При переходе к дочернему узлу в изоморфизме определится образ ещё одной вершины, поэтому появятся новые известные рёбра, которые точно будут присутствовать в объединении графов. Далее следует посчитать количество получившихся на данный момент рёбер. Если их стало больше, чем верхняя граница m в алгоритме, то ни один дочерний узел не содержит решения задачи.

Заключение

В работе [10] использовался кластер для подсчёта В-1-Р решёток и торов. Были просчитаны только графы с числом вершин до 12, но не был просчитан 16-ти вершинный гиперкуб (его можно рассматривать как решётку), что показывает ограничения используемых алгоритмов.

С помощью описанного в статье метода удалось построить МВ-1-Р 16-вершинного гиперкуба без применения многопоточности менее, чем за час (процессор AMD Ryzen 7 7840H, 1 поток). Максимальный порог был установлен на 37 рёбер, так как расширение с 38 рёбрами известно — это тривиальное вершинное 1-расширение. Оказалось, что МВ-1-Р у 16-вершинного гиперкуба единственное и оно совпадает с тем, что может быть построено по схеме, описанной в [9].

Высокая эффективность объясняется большим количеством автоморфизмов и хорошей работой оптимизатора для 16-вершинного гиперкуба, т.к. он является вершинно-симметричным графом, то есть графом, у которого все вершины подобны.

Подводя итог, можно сказать, что в статье описан алгоритм, построенный на новом принципе, позволяющем строить минимальные вершинные k-расширения без непосредственной проверки на расширение.

Список литературы

[1] Hayes J.P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Transactions on Computers. 1976. Vol. 25, № 9. Pp. 875–884.

[2] Harary F., Hayes J.P. Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. Vol. 27. Pp. 19–23.

[3] Harary F., Hayes J.P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol. 23. Pp. 135–142.

[4] Абросимов М.Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Издательство Саратовского университета, 2012. 192 с.

[5] Абросимов М.Б. Теория построения отказоустойчивых систем. М.: Издательство «Перо», 2024. 200 с.

[6] Harary F., Hayes J.P., Wu H.J. A survey of the theory of hypercube graphs // Computers and Mathematics with Applications. 1988. Vol. 15, № 4. Pp. 277–289.

[7] Лобов А.А., Абросимов М.Б. О единственности минимального рёберного 1-расширения гиперкуба Q4 // Прикладная дискретная математика. 2022. № 58. С. 84–93.

[8] Лобов А.А. Единственность минимального рёберного 1-расширения гиперкубов // International Journal of Open Information Technologies. 2023. Т. 11, № 9. С. 28–32.

[9] Лобов А.А., Абросимов М.Б. О вершинном 1-расширении гиперкуба // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Международной научной конференции. Саратов: ИЦ «Наука», 2018. С. 249–251.

[10] Камил И.А.К. Вычислительный эксперимент по построению отказоустойчивых реализаций графов с числом вершин до 9 // International Journal of Open Information Technologies. 2020. Т. 8, № 4. С. 43–47.

[11] Разумовский П.В., Абросимов М.Б. Построение цветных графов без проверки на изоморфизм // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, № 2. С. 267–277.

[12] Сухов С.А., Абросимов М.Б. О количестве оптимальных 1-гамильтоновых графов с числом вершин до 26 и 28 // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2016. № 9. С. 103–105.

[13] Абросимов М.Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Математические заметки. 2010. Т. 88, № 5. С. 643–650.

[14] Brinkmann G. Isomorphism rejection in structure generation programs // Discrete Mathematical Chemistry. Series: Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 2000. Pp. 25–38.

Образец цитирования

Лобов А.А. Построение минимальных вершинных расширений графа путём объединения его изоморфных копий // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 1. С. 79–88. https://doi.org/10.26456/vtpmk759

Сведения об авторах

1. **Лобов Александр Андреевич**
   заведующий лабораторией компьютерной безопасности Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского.

   Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского.
   E-mail: aisanekai@mail.ru

CONSTRUCTION OF OPTIMAL NODE FAULT TOLERANT GRAPH REALIZATION BY UNION OF ITS ISOMORPHIC COPIES

Lobov A.A.
Saratov State University, Saratov

Received 03.11.2025, revised 19.12.2025.

Hypercube is one of the classic topologies for constructing information communication networks. Much work has been devoted to the study of hypercubes and their properties. Some results related to the problem of constructing fault-tolerant implementations are also known. In 1993 Harary and Hayes proposed a scheme for constructing optimal edge-tolerant implementations of an arbitrary hypercube. The uniqueness of their scheme was later proven. To date, a similar scheme for constructing an optimal vertex-tolerant implementation of a hypercube has not been found. Optimal k-node-tolerant graph implementations are called minimal vertex-tolerant k-extensions. Various numerical methods are used to find minimal vertex k-extensions. Results are known for an 8-vertex hypercube, but no result has been found for a 16-vertex hypercube, even using cluster computations. This paper proposes a new approach to constructing vertex-tolerant graph extensions. Its correctness is substantiated, and an algorithm based on this approach is described. Optimizations of this algorithm based on automorphism groups are proposed and justified. The proposed algorithm allows one to construct all minimal vertex 1-extensions of a 16-vertex hypercube without the use of a cluster or supercomputer.

Keywords: graph, hypercube, vertex extension, node fault-tolerance graph realization, fault-tolerance.

Citation

Lobov A.A., "Construction of optimal node fault tolerant graph realization by union of its isomorphic copies", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2026, № 1, 79–88 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk759

References

[1] Hayes J.P., "A graph model for fault-tolerant computing system", *IEEE Transactions on Computers*, **25**:9 (1976), 875–884.

[2] Harary F., Hayes J.P., "Node fault tolerance in graphs", *Networks*, **27** (1996), 19–23.

[3] Harary F., Hayes J.P., "Edge fault tolerance in graphs", *Networks*, **23** (1993), 135–142.

[4] Abrosimov M.B., *Grafovye modeli otkazoustoychivosti [Graph Models of Fault Tolerance]*, Saratov University Publishing House, Saratov, 2012 (in Russian), 192 pp.

[5] Abrosimov M.B., *Teoriya postroeniya otkazoustojchivykh sistem [Theory of Building Fault-Tolerant Systems]*, Pero Publishing House, Moscow, 2024 (in Russian), 200 pp.

[6] Harary F., Hayes J.P., Wu H.J., "A survey of the theory of hypercube graphs", *Computers and Mathematics with Applications*, **15**:4 (1988), 277–289.

[7] Lobov A.A., Abrosimov M.B., "On the uniqueness of the minimal edge 1-extension of the hypercube Q4", *Prikladnaya diskretnaya matematika [Applied Discrete Mathematics]*, 2022, № 58, 84–93 (in Russian).

[8] Lobov A.A., "Uniqueness of the minimal edge 1-extension of hypercubes", *International Journal of Open Information Technologies*, **11**:9 (2023), 28–32 (in Russian).

[9] Lobov A.A., Abrosimov M.B., "On the vertex 1-extension of a hypercube", *Kompyuternye nauki i informatsionnye tekhnologii: Materialy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii [Computer Science and Information Technologies: Proceedings of the International Scientific Conference]*, Publishing Center "Science", Saratov, 2018, 249–251 (in Russian).

[10] Kamil I.A.K., "Computational experiment on constructing fault-tolerant realizations of graphs with up to 9 vertices", *International Journal of Open Information Technologies*, **8**:4 (2020), 43–47 (in Russian).

[11] Razumovskij P.V., Abrosimov M.B., "Construction of colored graphs without checking for isomorphism", *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika [Proceedings of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics]*, **21**:2 (2021), 267–277 (in Russian).

[12] Sukhov S.A., Abrosimov M.B., "On the number of optimal 1-Hamiltonian graphs with up to 26 and 28 vertices", *Prikladnaya diskretnaya matematika. Prilozhenie [Applied Discrete Mathematics. Supplement]*, 2016, № 9, 103–105 (in Russian).

[13] Abrosimov M.B., "On the complexity of some problems related to graph extensions", *Mathematical Notes*, **88**:5 (2010), 619–625.

[14] Brinkmann G., "Isomorphism rejection in structure generation programs", *Discrete Mathematical Chemistry*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2000, 25–38.

Author Info

1. **Lobov Alexandr Andreevich**
Head of the Computer Security Laboratory, Saratov State University.

Russia, 410012, Saratov, Astrakhanskaya st., 83, SSU. E-mail: aisanekai@mail.ru