ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 519.886.2

ОЦЕНКА БЕСКОНЕЧНОГО КОЛЛ-ОПЦИОНА ДЛЯ ПРОЦЕССА СО СКАЧКАМИ

Морозов В.В., Осипа А.Д.
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 01.10.2025, после переработки 02.11.2025.

В работе исследуется оценка стоимости бесконечного американского колл-опциона для риск-нейтрального финансового рынка, на котором логарифм стоимости акции описывается процессом со скачками. Он представляет собой сумму линейной части, сложного пуассоновского и винеровского процессов. Рассматриваются две модели рынка из работы [1] с добавленным непрерывным потоком дивидендов. Для первой модели, где скачки происходят вверх, оценка производится методом из работы [6] — путем решения уравнения Вольтерра второго рода для стоимости бесконечного барьерного опциона. В случае экспоненциального распределения величины скачка нахождение стоимости бесконечного колл-опциона сведено к задаче оптимизации. Во второй модели, где скачки происходят вниз, используется мартингал из работы [1].

Ключевые слова: бесконечные опционы, процессы со скачками, сложный пуассоновский процесс, уравнение Вольтерра второго рода, мартингальный подход.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 2. С. 5–17.
https://doi.org/10.26456/vtpmk749

Введение

Бесконечный американский опцион представляет собой контракт, дающий его владельцу право на покупку или продажу базового актива по цене исполнения с возможностью предъявления в любой момент времени. Оценка подобных производных финансовых инструментов осуществляется в модели риск-нейтрального (безарбитражного) финансового рынка, в которой стоимость акции представляет собой случайный процесс относительно риск-нейтральной вероятностной меры. В классической модели Блэка-Шоулса [2], где стоимость акции задается геометрическим броуновским движением, имеются явные выражения для стоимостей бесконечных колл- и пут-опционов, а также некоторых экзотических опционов [3].

В [4] изучались опционы с платежами, однородными относительно цен двух активов. Обзор работ по оценке бесконечных американских пут-опционов для процессов со скачками см. в [5]. В статье Гербера и Лэндри [6] оценка пут-опциона осуществляется в рамках модели, в которой логарифм стоимости базового актива описывается процессом со скачками, представляющим собой сумму линейной функции, сложного пуассоновского и винеровского процессов. В данной статье речь идет об оценке бесконечного колл-опциона при наличии потока дивидендов постоянной интенсивности.

1. Постановка задачи

Следуя [1], рассмотрим две модели финансового риск-нейтрального рынка, на котором обращаются безрисковый актив и акции. Безрисковый актив характеризуется постоянной процентной ставкой $r > 0$. Стоимость акции задаётся процессом $S(t) = e^{U(t)},\ t \geqslant 0$, где в модели I* $U(t) = u - ct + Z(t) + \sigma W(t)$, а в модели II* $U(t) = u + ct - Z(t) + \sigma W(t)$. Здесь $u = \ln S(0),\ c > 0,\ Z(t) = X_1 + ... + X_{N(t)}$ — сложный пуассоновский процесс с параметром $\lambda > 0$ и плотностью распределения величин скачков $p(x),\ x \geqslant 0$, а $W(t)$ — винеровский процесс, $W(0) = 0$. Будем считать траектории обоих процессов $U(t)$ непрерывными справа.

Предположим, что по акции выплачиваются дивиденды интенсивности $\delta > 0$. Подробнее это означает следующее. За отрезок времени $[t, t+dt]$ инвестор (держатель акции) получает дивиденды в сумме $\delta S(t)dt$. Предполагается, что дивиденды он немедленно реинвестирует, т. е. приобретает дополнительно акции в количестве δdt по цене $S(t)$. В результате за время dt количество акций инвестора увеличивается в $1 + \delta dt \approx e^{\delta dt}$ раз, а за время t — в $e^{\delta t}$ раз. При отсутствии дивидендов полагаем $\delta = 0$. В рассматриваемых моделях условие риск-нейтральности рынка означает, что процесс $e^{-(r-\delta)t}S(t)$ является мартингалом. Поэтому

$$e^{-(r-\delta)t}\,\mathbb{E}[e^{U(t)}\,|\,U(0) = u] = e^{u} \text{ при любых } t > 0. \tag{1}$$

Требуется найти стоимость бесконечного колл-опциона с ценой исполнения K. При предъявлении опциона в момент времени $t > 0$ платеж по опциону составит величину $\max(S(t) - K, 0) = (S(t) - K)^+$. Если опцион никогда не предъявляется, то формально будем считать, что платеж по нему равен нулю. Обозначим через $V(S)$ стоимость опциона на акцию, начальная стоимость которой равна S. В дальнейшем $\mathbb{E}_0$ — символ условного математического ожидания при условии $U(0) = u$ (или $S(0) = S$). Положим $K \vee S = \max(K, S)$. Для $L \geqslant K \vee S$ введем случайную величину $T_L = \inf\{t \geqslant 0 : S(t) \geqslant L\}$, задающую пороговое правило предъявления опциона в момент первого достижения процессом $S(t)$ уровня L. Определим функцию $V(S, L) = \mathbb{E}_0[e^{-rT_L}(S(T_L) - K)]$, характеризующую стоимость бесконечного опциона с барьером, который исполняется, как только стоимость акции достигнет уровня L. Тогда стоимость бесконечного колл-опциона равна

$$V(S) = \sup_{L \geqslant K \vee S} V(S, L).$$

Оптимальное правило предъявления опциона $T^* = \inf\{t \geqslant 0 : S(t) \geqslant L^*\}$ определяется порогом L^*, который в работе для обеих моделей рынка будет указан в виде явных формул.

2. Решение для модели I*

Для оценки стоимости бесконечного колл-опциона в модели I* будем использовать предложенный в [6] метод нахождения стоимости бесконечного пут-опциона в условиях модели II*. Напомним, что модель I* характеризуется процессом $U(t) = u - ct + Z(t) + \sigma W(t)$, где $u = \ln S(0)$. Можно интерпретировать $U(t)$ как величину капитала компании, имеющей постоянные затраты и случайные продажи, приводящие к скачкам капитала. Поскольку $\mathbb{E}\left[e^{Z(t)}\right] = e^{\lambda t(\mathbb{E}\, e^X - 1)}$, условие риск-нейтральности (1) для модели I* получаем в виде

$$-r + \delta - c + D + \lambda\Big(\int\limits_0^{+\infty} e^x p(x)dx - 1\Big) = 0, \tag{2}$$

где $D = \sigma^2/2$.

Далее нам потребуется вспомогательный мартингал. Подберем параметр $\xi > 0$ так, чтобы процесс $e^{-rt}S(t)^{-\xi}$ был мартингалом. Отсюда, в частности, выполнено равенство $\mathbb{E}_0[e^{-rt}S(t)^{-\xi}] = S^{-\xi}$ при всех $t > 0$ или

$$-r + c\xi + D\xi^2 + \lambda\Big(\int\limits_0^{+\infty} e^{-\xi x} p(x)dx - 1\Big) = 0. \tag{3}$$

Функция левой части этого уравнения строго выпукла по ξ, а при $\xi = 0$ принимает значение $-r$. Следовательно, уравнение (3) имеет единственный корень $\xi_1 > 0$. Положим $\rho = \xi_1$.

Достижение уровня $\ln L > u$ процессом $U(t) = u - ct + Z(t) + \sigma W(t)$ происходит в том случае, когда процесс $\ln L - u + ct - Z(t) - \sigma W(t)$ достигает нуля. Поэтому далее будем использовать соответствующим образом переформулированные результаты из работы [6], относящиеся к достижению нуля процессом $U(t)$ в модели II* и полученные с использованием уравнения (3) при $\xi = \rho > 0$.

Пусть T_j — момент первого пересечения процессом $U(t) = u - ct + Z(t) + \sigma W(t)$ начального уровня u в результате скачка (индекс j от английского jump). Рассмотрим случайную величину $Y = U(T_j) - u$. Таким образом, в некоторый момент времени t процесс принимает значение $U(t) < u$, а затем в момент T_j делает скачок, пересекая уровень u. Если такое событие не произошло, то полагаем $T_j = +\infty$, а $Y = 0$. Отметим, что при конечном T_j справедливы равенства $S(T_j) = e^{U(T_j)} = e^{u + U(T_j) - u} = Se^Y$. Обозначим через $f(y,t)$ плотность совместного распределения величин Y и T_j. Определим функцию

$$g(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-rt} f(y,t)dt. \tag{4}$$

Величину $g(y)dy$ можно интерпретировать как дисконтированную вероятность события $\{y \leqslant Y \leqslant y + dy\}$. В [6] доказано, что $g(y)$ имеет вид свертки двух функций:

$$g(y) = \int\limits_0^{y} h(y-x)\gamma(x)dx,\ h(x) = \frac{c}{D}e^{-bx},\ \gamma(x) = \frac{\lambda}{c}e^{\rho x}\int\limits_x^{+\infty} e^{-\rho x_1} p(x_1)dx_1, \tag{5}$$

где $b = c/D+\rho$. Далее будем предполагать, что $b > 1$. Если параметр D устремить к нулю, то функция $h(x)$ поточечно сходится к дельта-функции, а $g(y)$ — к функции

$$\frac{\lambda}{c} e^{\rho y} \int\limits_{y}^{+\infty} e^{-\rho x_1} p(x_1) dx_1,$$

что совпадает с формулой (3.4) из работы [7], где в $U(t)$ винеровский процесс отсутствует.

2.1. Интегральное уравнение для функции $V(S, L)$

Процесс $U(t)$ может впервые достичь уровня $\ln L$ по двум причинам: либо вследствие флуктуации винеровского процесса, либо по причине скачка. В [6] показано, что вероятность первого достижения процессом $U(t)$ уровня $\ln L$ вследствие указанной флуктуации равна $(S/L)^b$.

С учетом формулы (4) справедливо уравнение

$$V(S,L) = \mathbb{E}_0[e^{-rT_L}(S(T_L) - K)] = \int\limits_{0}^{\ln(L/S)} V(Se^y, L) g(y) dy + \Big(\frac{S}{L}\Big)^b (L-K) +$$
$$+ \int\limits_{\ln(L/S)}^{+\infty} (Se^y - K) g(y) dy - \Big(\frac{S}{L}\Big)^b \int\limits_{0}^{+\infty} (Le^y - K) g(y) dy. \quad (6)$$

Данное уравнение требует пояснений. Определим события $A_1 = \{U(T_L) = \ln L\}$, $A_2 = \{U(T_L) > \ln L\}$. Пусть $\tilde{T}_L$ — первый момент времени, когда процесс $U(t)$ совершает скачок, в результате которого он оказывается выше уровня $\ln L$. Ясно, что $T_L \leqslant \tilde{T}_L$ и равенство $T_L = \tilde{T}_L$ имеет место только тогда, когда процесс $U(t)$ в момент первого достижения уровня $\ln L$ пересекает его скачком. Рассмотрим события $\tilde{A}_1 = \{U(T_L) = \ln L,\ \tilde{T}_L < +\infty\}$, $\tilde{A}_2 = A_2 \cup \tilde{A}_1$, где события A_2 и $\tilde{A}_1$ не пересекаются. Событие $\tilde{A}_2$ включает в себя все сценарии, в которых происходит пересечение процессом $U(t)$ уровня $\ln L$ скачком. Определим функции

$$V_i(S,L) = \mathbb{E}_0[e^{-rT_L}(S(T_L) - K) | A_i\ ],\ \ \tilde{V}_i(S,L) = \mathbb{E}_0[e^{-r\tilde{T}_L}(S(\tilde{T}_L) - K) | \tilde{A}_i],\ \ i = 1, 2.$$

Справедливы равенства $V(S,L) = V_1(S,L) + V_2(S,L),\ V_2(S,L) = \tilde{V}_2(S,L) - \tilde{V}_1(S,L)$. Покажем, что выполнены следующие уравнения:

$$V_1(S,L) = \int\limits_{0}^{\ln(L/S)} V_1(Se^y, L) g(y) dy + \Big(\frac{S}{L}\Big)^b (L-K), \quad (7)$$

$$\tilde{V}_2(S,L) = \int\limits_{0}^{\ln(L/S)} \tilde{V}_2(Se^y, L) g(y) dy + \int\limits_{\ln(L/S)}^{+\infty} (Se^y - K) g(y) dy, \quad (8)$$

$$\tilde{V}_1(S,L) = \int\limits_0^{\ln(L/S)} \tilde{V}_1(Se^y, L)g(y)dy + \Big(\frac{S}{L}\Big)^b w_1, \text{ где } w_1 = \int\limits_0^{+\infty} (Le^y - K)g(y)dy. \quad (9)$$

Функция

$$V_1(S,L) = \mathbb{E}_0[e^{-rT_L}(S(T_L) - K)|A_1] = (L-K)\,\mathbb{E}_0[e^{-rT_L}|A_1]$$

совпадает с функцией $\phi(u)$ из раздела 3 работы [6] с платежом $w_0 = L - K$. Поэтому для нее справедливо уравнение восстановления (7), доказанное в [6]. В его правой части $(S/L)^b$ — вероятность события $U(T_L) = \ln L$. В уравнении (8) второй интеграл соответствует случаю, когда $T_j = \tilde{T}_L$ и $Y > \ln L - u = \ln(L/S)$.

Уравнение (9) является уравнением восстановления, но с другим платежом w_1. Действительно, процесс $U(t)$, достигнув в момент T_L значения $U(T_L) = \ln L$, в момент $\tilde{T}_L > T_L$ делает скачок через уровень $\ln L$. Если такой скачок отсутствует, то полагаем $\tilde{T}_L = +\infty$. При конечном $\tilde{T}_L$ случайные величины T_L и $\tilde{T}_L - T_L$ независимы, а величины $Y_L = U(\tilde{T}_L) - \ln L$ и $\tilde{T}_L - T_L$ имеют совместную плотность распределения $f(y,t)$. Далее, при конечном $\tilde{T}_L$ справедливы равенства $S(\tilde{T}_L) = e^{U(\tilde{T}_L)} = e^{U(T_L)+U(\tilde{T}_L)-U(T_L)} = Le^{Y_L}$. Обозначим через $\mathcal{F}_{T_L}$ σ-алгебру событий, произошедших к моменту T_L. Уравнение (9), как и (7), следует из вида функции

$$\tilde{V}_1(S,L) = \mathbb{E}_0[e^{-r\tilde{T}_L}(S(\tilde{T}_L) - K)|\tilde{A}_1] = \mathbb{E}_0[e^{-rT_L}\,\mathbb{E}[e^{-r(\tilde{T}_L - T_L)}(Le^{Y_L} - K)|\mathcal{F}_{T_L}]|\tilde{A}_1] =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} (Le^y - K)g(y)dy\,\mathbb{E}_0[e^{-rT_L}|A_1] = w_1\,\mathbb{E}_0[e^{-rT_L}|A_1].$$

Добавляя к уравнению (7) разность уравнений (8) и (9), получим уравнение (6).

2.2. Решение интегрального уравнения

Стоимость бесконечного колл-опциона равна

$$V(S) = \max_{L \geqslant K \vee S} V(S,L) = V(S, L^0(S)).$$

Пусть L^* — оптимальный порог предъявления опциона. Это означает, что оптимальное решающее правило предъявления и стоимость опциона равны

$$T^* = \min\{t \mid S(t) \geqslant L^*\}, \quad V(S) = \begin{cases} V(S, L^0(S)), & S < L^*, \\ S - K, & S \geqslant L^*. \end{cases}$$

Заметим, что $L^0(S) = \arg\max\limits_{L \geqslant K \vee S} V(S,L) = S$ при $S \geqslant L^*$ и $V(L,L) = L - K$. При фиксированном S выпишем производную

$$V'_L(S,L) = \int\limits_0^{\ln(L/S)} V'_L(Se^y, L)g(y)dy - \frac{b}{L}\Big(\frac{S}{L}\Big)^b (L-K) + \Big(\frac{S}{L}\Big)^b +$$

$$+\frac{b}{L}\Big(\frac{S}{L}\Big)^b\int\limits_0^{+\infty}(Le^y-K)g(y)dy-\Big(\frac{S}{L}\Big)^b\int\limits_0^{+\infty}e^y g(y)dy.$$

Оптимальный порог

$$L^*=\frac{bK(1-g_0)}{(b-1)(1-g_1)},\text{ где } g_0=\int\limits_0^{+\infty}g(y)dy,\ g_1=\int\limits_0^{+\infty}e^y g(y)dy, \tag{10}$$

получаем из равенства $V(L^*,L^*)=L^*-K$ и условия оптимальности первого порядка $V'_L(L^*,L^*)=0$. В [6] показано, что величина g_0 не зависит от плотности $p(x)$ и равна

$$g_0=1-\frac{r}{c\rho+D\rho^2}.$$

В уравнении (3) при $\xi=\rho$ коэффициент при λ отрицательный. Поэтому $r<c\rho+D\rho^2$ и $g_0<1$. Найдем величину g_1. Меняя порядок интегрирования, находим

$$g_1=\int\limits_0^{\infty}e^y g(y)dy=\int\limits_0^{\infty}e^y\int\limits_0^{y}h(y-x)\gamma(x)dxdy=\int\limits_0^{\infty}\gamma(x)\int\limits_x^{\infty}e^y h(y-x)dydx=$$

$$=[y=z+x]=\int\limits_0^{\infty}e^x\gamma(x)dx\int\limits_0^{\infty}e^z h(z)dz=\frac{c}{D(b-1)}\int\limits_0^{\infty}e^x\gamma(x)dx.$$

Для вычисления последнего интеграла будем использовать равенство

$$\lambda\Big(\int\limits_0^{\infty}e^x p(x)dx-\int\limits_0^{\infty}e^{-\rho x}p(x)dx\Big)=-\delta+c(1+\rho)-D(1-\rho^2), \tag{11}$$

полученное вычитанием уравнений (2) и (3). Имеем

$$\int\limits_0^{\infty}e^x\gamma(x)dx=\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^{\infty}e^x e^{\rho x}\int\limits_x^{\infty}e^{-\rho x_1}p(x_1)dx_1dx=\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^{\infty}e^{-\rho x_1}p(x_1)\int\limits_0^{x_1}e^{(\rho+1)x}dxdx_1=$$

$$=\frac{\lambda}{c(\rho+1)}\Big[\int\limits_0^{\infty}e^{x_1}p(x_1)dx_1-\int\limits_0^{\infty}e^{-\rho x_1}p(x_1)dx_1\Big]=\frac{-\delta+c(1+\rho)-D(1-\rho^2)}{c(\rho+1)}.$$

Отсюда, учитывая $b=c/D+\rho$, находим

$$g_1=\frac{c}{D(b-1)}\cdot\frac{-\delta+c(1+\rho)-D(1-\rho^2)}{c(\rho+1)}=1-\frac{\delta}{c(1+\rho)-D(1-\rho^2)}.$$

Поскольку левая часть в (11) положительна, $\delta<c(1+\rho)-D(1-\rho^2)$ и $g_1<1$.

Теперь займемся поиском функции $V(S,L)$. Сделаем замену $S = Le^{-x}$ и определим функции

$$M(x,L) = V(Le^{-x}, L), \ \ m(x,L) = \int_x^{+\infty} (Le^{y-x} - K) g(y)\, dy, \ x \geqslant 0.$$

После подстановки в (6) получим уравнение Вольтерра второго рода

$$M(x,L) = \int_0^x M(x-y,L) g(y)\, dy + m(x,L) + e^{-bx}(L(1-g_1) - K(1-g_0)), \qquad (12)$$

где L фиксировано и выступает в роли параметра. Для его решения используем преобразование Фурье введенных функций

$$\hat{M}(s,L) = \int_0^{+\infty} e^{-isx} M(x,L) dx, \ \hat{g}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-isx} g(x) dx,$$

$$\hat{m}(s,L) = \int_0^{+\infty} e^{-isx} m(x,L) dx = \frac{L}{is+1}(g_1 - \hat{g}(s)) - \frac{K}{is}(g_0 - \hat{g}(s)), \ s \in \mathbb{R}.$$

Из уравнения (12) следует

$$\hat{M}(s,L) = \frac{1}{1-\hat{g}(s)} \Big(\frac{L}{is+1}(g_1 - \hat{g}(s)) - \frac{K}{is}(g_0 - \hat{g}(s)) + \frac{1}{is+b}(L(1-g_1) - K(1-g_0)) \Big) =$$

$$= L\Big[\frac{1-g_1}{1-\hat{g}(s)} \Big(-\frac{1}{is+1} + \frac{1}{is+b} \Big) + \frac{1}{is+1} \Big] - K\Big[\frac{1-g_0}{1-\hat{g}(s)} \Big(-\frac{1}{is} + \frac{1}{is+b} \Big) + \frac{1}{is} \Big]. \ (13)$$

Теперь функция $M(x,L)$ находится обратным преобразованием Фурье:

$$M(x,L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} \hat{M}(s,L) ds. \qquad (14)$$

Искомая стоимость барьерного опциона имеет вид $V(S,L) = M(\ln(L/S), L)$.

Отметим частный случай. Пусть $\lambda = 0$, т.е. пуассоновский процесс отсутствует. Тогда $g(u) \equiv 0$, $\hat{g}(s) \equiv 0$, $g_0 = g_1 = 0$, а $\rho = (-c + \sqrt{c^2 + 4Dr})/(2D)$ — положительный корень уравнения $D\rho^2 + c\rho - r = 0$. Тогда из (6) получим $V(S,L) = (S/L)^b (L-K)$, а $L^* = bK/(b-1)$, что совпадает с формулами (3.15) и (3.16) работы [3].

2.3. Случай экспоненциального распределения величины скачка

Пусть плотность распределения величины скачка $p(x) = \beta e^{-\beta x}$, $x \geqslant 0$, $\beta > 1$. Из формул (5) получим

$$\gamma(x) = \frac{\lambda\beta}{c(\beta+\rho)} e^{-\beta x}, \ g(y) = \frac{\lambda\beta}{D(\beta+\rho)(b-\beta)}(e^{-\beta y} - e^{-by}). \qquad (15)$$

Уравнение (3) при $\xi = \rho$ принимает вид

$$-r + c\rho + D\rho^2 - \frac{\lambda\rho}{\rho+\beta} = 0.$$

Тогда из определения функции $\hat{g}(s)$ имеем

$$1 - \hat{g}(s) = \frac{\rho D s^2 - i(c\rho + D\rho^2 + \beta D\rho)s - \beta r}{\rho(s - i\beta)(Ds - i(c + \rho D))} = \frac{(s - is_1)(s - is_2)}{(s - i\beta)(s - ib)}, \tag{16}$$

где величины

$$s_{1,2} = \frac{c\rho + D\rho^2 + \beta D\rho \pm \sqrt{(c\rho + D\rho^2 + \beta D\rho)^2 - 4\rho D\beta r}}{2\rho D}$$

вещественны и положительны, поскольку $(c\rho + D\rho^2 + \beta D\rho)^2 > (r + \beta D\rho)^2 \geqslant 4\rho D\beta r$. Для вычисления интеграла (14) определим на множестве $\mathbb{R}_+ \times \{0, 1, b\}$ функцию

$$q(x,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{isx}ds}{(is+\theta)(1-\hat{g}(s))} = k(\theta)\frac{(\theta - b)(\theta - \beta)e^{-\theta x}}{(\theta - s_1)(\theta - s_2)} -$$

$$-\frac{(s_1 - b)(s_1 - \beta)e^{-s_1 x}}{(\theta - s_1)(s_1 - s_2)} + \frac{(s_2 - b)(s_2 - \beta)e^{-s_2 x}}{(\theta - s_2)(s_1 - s_2)},\ \text{где}\ k(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta = 1, b; \\ 1/2, & \theta = 0. \end{cases}$$

Из (13) и (14) получаем

$$M(x,L) = L\Big[(1 - g_1)(-q(x,1) + q(x,b)) + e^{-x}\Big] - K\Big[(1 - g_0)(-q(x,0) + q(x,b)) + \frac{1}{2}\Big].$$

Справедливы соотношения $q(0,\theta) = 1,\ \theta \neq 0,\ q'_x(0,\theta) = -\theta$. Используя их и равенство $x'_L = 1/L$, найдем производную

$$\frac{dM(x,L)}{dL}\Big|_{L=S} = 2(1 - g_1) - 1 + (1 - g_1)(-1 - b) + 1 + \frac{K}{L}(1 - g_0)b =$$

$$= (1 - b)(1 - g_1) + \frac{K}{L}(1 - g_0)b.$$

Она обращается в нуль при $L = L^*$ из (10), что подтверждает справедливость проведенных выкладок.

Пусть $D = 0$, т.е. винеровский процесс отсутствует. Тогда

$$b = +\infty,\ g_0 = 1 - \frac{r}{c\rho},\ g_1 = 1 - \frac{\delta}{c(1+\rho)},\ L^* = \frac{Kr(1+\rho)}{\rho\delta}.$$

Уточним вид функции $M(x,L)$. Из (16) находим

$$1 - \hat{g}(s) = \frac{ic\rho s + \beta r}{i\rho c(s - i\beta)},\ q(x,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{isx}ds}{(is+\theta)(1-\hat{g}(s))} =$$

$$= \frac{1}{\theta c\rho - \beta r}(\beta(c\rho - r)e^{-\frac{\beta r}{c\rho}x} + k(\theta)c\rho(\theta - \beta)e^{-\theta x}), \ k(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta = 1, b; \\ 1/2, & \theta = 0. \end{cases}$$

Здесь $q(0,\theta) = 1, \ \theta \neq 0$, а $q'_x(0,\theta) = \beta - \theta - \beta r/(c\rho)$. Из (13) и (14) получаем

$$\hat{M}(s,L) = \frac{L}{is+1}\Big(1 - \frac{1-g_1}{1-\hat{g}(s)}\Big) - \frac{K}{is}\Big(1 - \frac{1-g_0}{1-\hat{g}(s)}\Big),$$

$$M(x,L) = L[e^{-x} - (1-g_1)q(x,1)] - K\Big[\frac{1}{2} - (1-g_0)q(x,0)\Big].$$

Приравнивая к нулю производную

$$\frac{dM(x,L)}{dL}\Big|_{L=S} = 1 - (1-g_1) - 1 - (1-g_1)\Big(\beta - 1 - \frac{\beta r}{c\rho}\Big) + \frac{K}{L}(1-g_0)\Big(\beta - \frac{\beta r}{c\rho}\Big) =$$

$$= -(1-g_1)\Big(\beta - \frac{\beta r}{c\rho}\Big) + \frac{K}{L}(1-g_0)\Big(\beta - \frac{\beta r}{c\rho}\Big),$$

получим, как и выше, $L^* = K(1-g_0)/(1-g_1) = Kr(1+\rho)/(\rho\delta)$.

3. Решение для модели II*

Модель II* характеризуется процессом $U(t) = u + ct - Z(t) + \sigma W(t)$, где $u = \ln S(0)$. Процесс $U(t)$ можно интерпретировать как динамику капитала страховой компании с потоком взносов (премий) интенсивности c и случайными выплатами. Условие риск-нейтральности (1) для модели II* получаем в виде

$$-r + \delta + c + D + \lambda\Big(\int_0^{+\infty} e^{-x}p(x)dx - 1\Big) = 0. \tag{17}$$

Рассмотрим бесконечный американский колл-опцион с платежом $(S(t) - K)^+$ при предъявлении в момент $t \geqslant 0$. Его стоимость для модели II* равна

$$V(S) = \sup_{L \geqslant S \vee K} \mathbb{E}_0\left[e^{-rT_L}(S(T_L) - K)^+\right] = \sup_{L \geqslant S \vee K} (L - K)\ \mathbb{E}_0[e^{-rT_L}],$$

где T_L — момент остановки, определяемый первым достижением уровня L процессом $S(t)$. Здесь $S(T_L) = L$, поскольку у процесса $U(t) = u + ct - Z(t) + \sigma W(t)$ скачки направлены вниз и он пересекает уровень $\ln L$ в промежутке между скачками.

Следуя [1], рассмотрим вспомогательный мартингал $e^{-rt}S(t)^R$. Из равенства $\mathbb{E}_0[e^{-rt}S(t)^R] = S^R$ получаем

$$-r + cR + DR^2 + \lambda\Big(\int_0^{+\infty} e^{-Rx}p(x)dx - 1\Big) = 0. \tag{18}$$

Левая часть этого уравнения строго выпукла по R, а при $R = 1$ отрицательна, поскольку только слагаемым $\delta > 0$ отличается от левой части уравнения (17). Поэтому уравнение (18) имеет единственный корень $R > 1$. При $t < T_L$ мартингал

$e^{-rt}S(t)^R$ ограничен сверху константой L^R. Следовательно, по теореме Дуба об остановке [8] $\mathbb{E}_0[e^{-rT_L}S(T_L)^R] = S^R$. Отсюда $\mathbb{E}_0[e^{-rT_L}] = (S/L)^R$. Таким образом, стоимость бесконечного колл-опциона в модели II* равна

$$V(S) = \max_{L \geqslant S \vee K} \left(\frac{S}{L}\right)^R (L-K) = \begin{cases} (S/L^*)^R(L^* - K), & S < L^*, \\ S - K, & S \geqslant L^*, \end{cases}$$

где $L^* = RK/(R-1)$.

Заключение

В статье излагаются способы нахождения стоимости бесконечного колл-опциона в рамках двух моделей финансового рынка, описываемых процессами со скачками с добавленным непрерывным потоком реинвестируемых дивидендов постоянной интенсивности. Для процесса со скачками вверх решение уравнения Вольтерра для стоимости барьерного опциона осуществляется с помощью преобразования Фурье. В случае экспоненциального распределения величины скачка задача сводится к оптимизации функции, заданной в виде явной формулы. Для процесса со скачками вниз при нахождении стоимости колл-опциона используется мартингальный подход.

Список литературы

[1] Gerber H.U., Shiu E.S.W. Pricing perpetual options for jump processes // North American Actuarial Journal. 1998. Vol. 2, № 3. Pp. 101–107. https://doi.org/10.1080/10920277.1998.10595736

[2] Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81, № 3. Pp. 637–659.

[3] Gerber H.U., Shiu E.S.W. Martingale approach to pricing perpetual American options // ASTIN Bulletin. 1994. Vol. 24, № 2. Pp. 195–200. https://doi.org/10.2143/AST.24.2.2005065

[4] Gerber H.U., Shiu E.S.W. Martingale approach to pricing perpetual American options on two stocks // Mathematical Finance. 1996. Vol. 6, № 3. Pp. 303–322. https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.1996.tb00118.x

[5] Bayraktar E. Remarks on the perpetual American put option for jump diffusions. arXiv:math/0703538v9 [math. OC]. 2007.

[6] Gerber H.U., Landry B. On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option // Insurance: Mathematics and Economics. 1998. Vol. 22, № 3. Pp. 263–276. https://doi.org/10.1016/S0167-6687(98)00014-6

[7] Gerber H.U., Shiu E.S.W. On the time value of ruin // North American Actuarial Journal. 1998. Vol. 2, № 1. Pp. 48–78. https://doi.org/10.1080/10920277.1998.10595671

[8] Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. М.: Издательство иностранной литературы, 1956. 605 с.

Образец цитирования

Морозов В.В., Осипа А.Д. Оценка бесконечного колл-опциона для процесса со скачками // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 2. С. 5–17. https://doi.org/10.26456/vtpmk749

Сведения об авторах

1. **Морозов Владимир Викторович**
   доцент кафедры исследования операций факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

   Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: vmorosov@mail.ru

2. **Осипа Андрей Дмитриевич**
   аспирант кафедры исследования операций факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

   Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: andreyosipa@mail.ru

VALUATION OF PERPETUAL CALL OPTIONS FOR JUMP PROCESSES

Morozov V.V., Osipa A.D.
Lomonosov Moscow State University, Moscow

Received 01.10.2025, revised 02.11.2025.

This paper addresses the valuation of perpetual American call options within a risk-neutral financial market model where the logarithm of the stock price follows a jump-diffusion process. The process is defined as the sum of a linear drift, a compound Poisson process, and a Wiener process. Two market models with an added continuous flow of dividends are considered. For the first model, where jumps occur upwards, the valuation is performed using the Gerber-Landry method. This approach involves solving a Volterra integral equation of the second kind for the value of a perpetual barrier option. When the jump sizes are exponentially distributed, the problem of finding the perpetual call option value reduces to an optimization problem. For the second model, where jumps occur downwards, a Gerber-Shiu martingale approach is used to derive an explicit solution.

Keywords: perpetual options, jump processes, compound Poisson process, Volterra equation of the second kind, martingale approach.

Citation

Morozov V.V., Osipa A.D., "Valuation of perpetual call options for jump processes", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2026, № 2, 5–17 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk749

References

[1] Gerber H.U., Shiu E.S.W., "Pricing perpetual options for jump processes", *North American Actuarial Journal*, **2**:3 (1998), 101–107, https://doi.org/10.1080/10920277.1998.10595736.

[2] Black F., Scholes M., "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, **81**:3 (1973), 637–659.

[3] Gerber H.U., Shiu E.S.W., "Martingale approach to pricing perpetual American options", *ASTIN Bulletin*, **24**:2 (1994), 195–200, https://doi.org/10.2143/AST.24.2.2005065.

[4] Gerber H.U., Shiu E.S.W., "Martingale approach to pricing perpetual American options on two stocks", *Mathematical Finance*, **6**:3 (1996), 303–322, https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.1996.tb00118.x.

[5] Bayraktar E., *Remarks on the perpetual American put option for jump diffusions*, arXiv:math/0703538v9 [math. OC], 2007.

[6] Gerber H.U., Landry B., "On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option", *Insurance: Mathematics and Economics*, **22**:3 (1998), 263–276, https://doi.org/10.1016/S0167-6687(98)00014-6.

[7] Gerber H.U., Shiu E.S.W., "On the time value of ruin", *North American Actuarial Journal*, **2**:1 (1998), 48–78, https://doi.org/10.1080/10920277.1998.10595671.

[8] Dub Dzh.L., *Veroyatnostnye protsessy [Probabilistic processes]*, Izdatelstvo inostrannoj literatury, Moscow, 1956 (in Russian), 605 pp.

Author Info

1. **Morozov Vladimir Viktorovich**
   Associate professor at Operations Research department, Lomonosov MSU.

   Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskie gory, Lomonosov Moscow State University. E-mail: vmorosov@mail.ru

2. **Osipa Andrei Dmitrievich**
   PhD student at Operations Research department, Lomonosov MSU.

   Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskie gory, Lomonosov Moscow State University. E-mail: andreyosipa@mail.ru