УДК 510.62, 512.56

ОБ ЭЛИМИНАЦИИ КВАНТОРОВ В НЕКОТОРЫХ ТЕОРИЯХ ЧАСТИЧНОГО ПОРЯДКА

Первых И.М.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 24.03.2026, после переработки 10.04.2026.

В статье исследуется проблема элиминации кванторов в формулах первого порядка, содержащих отношения строгого порядка и несравнимости. Рассмотрены структуры, состоящие из множеств действительных чисел с минимальными элементами и без них. Для каждой из структур показано, что соответствующая теория допускает элиминацию кванторов, и даны явные конструкции бескванторных эквивалентов. Полученные результаты расширяют класс известных формальных систем, в которых элиминация кванторов возможна.

Ключевые слова: логика первого порядка, элиминация кванторов, теория частичного порядка.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 2. С. 18–36.
https://doi.org/10.26456/vtpmk774

Введение

Исследование теорий на возможность элиминации кванторов является одной из центральных задач математической логики и теории моделей, поскольку позволяет свести исследование сложных формул к анализу бескванторных формул, а также доказывает алгоритмическую разрешимость теории. В настоящей работе рассматривается класс формул языка $\mathcal{L} = \{<, \perp\}$, содержащих бинарные отношения строгого порядка и несравнимости, теория частичного порядка, формализованная системой аксиом, и некоторые структуры действительных чисел.

Основная цель статьи — доказать, что рассматриваемые теории допускают элиминацию кванторов. В работе сначала формулируется лемма о сводимости общей задачи элиминации кванторов к задаче элиминации кванторов в формулах специального вида. Затем исследуются две конкретные структуры, интерпретирующие теорию:

1) структура подмножеств действительных чисел с минимальным элементом;

© Первых И.М., 2026

2) структура подмножеств действительных чисел, ограниченных снизу (без требования существования минимума).

Для каждой из этих структур устанавливаются точные условия, выражающие отношения порядка и несравнимости через минимумы и инфимумы соответственно, что позволяет свести формулы с квантором к эквивалентным бескванторным формулам. Таким образом, демонстрируется возможность элиминации кванторов в рассматриваемых теориях.

1. Теории частичного порядка

Напомним основное определение теории частичного порядка.

Определение 1. *Бинарное отношение R на множестве X называется строгим отношением частичного порядка, если оно обладает следующими свойствами:*

– ***антирефлексивность:***

$$\forall a \in X \;\; \neg(aRa),$$

– ***транзитивность:***

$$\forall a, b, c \in X \;\; \big((aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc\big).$$

Определение 2. *Пусть $\mathcal{L} = \{<, \perp\}$ язык первого порядка с двумя бинарными предикатами, где $<$ — строгое отношение частичного порядка. Теорией частичного порядка $\mathcal{T}$ называется множество формул языка $\mathcal{L}$, выводимых из следующих аксиом:*

– ***свойства отношения** $<$:*

$$\begin{aligned}
&\forall x\, \neg(x < x),\\
&\forall x \forall y \forall z \big((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z\big),
\end{aligned}$$

– ***свойства отношения** $\perp$:*

$$\begin{aligned}
&\forall x\, \neg(x \perp x),\\
&\forall x \forall y (x \perp y \rightarrow y \perp x),
\end{aligned}$$

– ***взаимная исключаемость отношений:***

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y\; (x < y \vee y < x \vee x = y \vee x \perp y),\\
&\forall x \forall y\; \neg\big((x < y) \wedge (x = y)\big),\\
&\forall x \forall y\; \neg\big((x < y) \wedge (x \perp y)\big),\\
&\forall x \forall y\; \neg\big((x = y) \wedge (x \perp y)\big).
\end{aligned}$$

Теория $\mathcal{T}$ имеет моделями структуры, в которых:

– $<$ является отношением строгого частичного порядка;

– $\perp$ является симметричным отношением несравнимости;

– для любых двух элементов реализуется ровно один из типов отношения.

Согласно лемме 1.5.1 из [2], чтобы доказать, что элиминация кванторов осуществима в данной теории, достаточно показать, что можно элиминировать квантор существования, примененный к конъюнкции литералов, то есть элиминировать квантор в формуле вида:

$$\exists x \bigwedge_s L_s \equiv \exists x \Big(\bigwedge_i A_i < x \wedge \bigwedge_j x < B_j \wedge \bigwedge_k \neg(x < C_k) \wedge \bigwedge_l \neg(D_l < x) \\ \wedge \bigwedge_n E_n \perp x \wedge \bigwedge_m \neg(H_m \perp x) \wedge \bigwedge_p R_p \neq x \wedge \bigwedge_t G_t = x \Big).$$

Утверждение 1 (Лемма об элиминации кванторов в расширениях теории $\mathcal{T}$)**.** *Пусть $\mathcal{T}^*$ — теория, расширяющая $\mathcal{T}$. Каждая формула Φ вида*

$$\exists x \Big(\bigwedge_i A_i < x \wedge \bigwedge_j x < B_j \wedge \bigwedge_k \neg(x < C_k) \wedge \bigwedge_l \neg(D_l < x) \\ \wedge \bigwedge_n E_n \perp x \wedge \bigwedge_m \neg(H_m \perp x) \wedge \bigwedge_p R_p \neq x \wedge \bigwedge_t G_t = x \Big)$$

эквивалентна в $\mathcal{T}^*$ некоторой бескванторной формуле тогда и только тогда, когда каждая формула Ψ вида

$$\exists x \Big(\bigwedge_i A_i < x \wedge \bigwedge_j x < B_j \wedge \bigwedge_n E_n \perp x \Big)$$

также эквивалентна некоторой бескванторной формуле.

Доказательство. Рассмотрим формулу Φ

$$\exists x \Big(\bigwedge_i A_i < x \wedge \bigwedge_j x < B_j \wedge \bigwedge_k \neg(x < C_k) \wedge \bigwedge_l \neg(D_l < x) \\ \wedge \bigwedge_n E_n \perp x \wedge \bigwedge_m \neg(H_m \perp x) \wedge \bigwedge_p R_p \neq x \wedge \bigwedge_t G_t = x \Big).$$

Уберём из формулы отрицания:

$$\begin{aligned} \neg(x < C_k) &\equiv C_k < x \ \vee \ x = C_k \ \vee \ C_k \perp x, \\ \neg(D_l < x) &\equiv x < D_l \ \vee \ x = D_l \ \vee \ D_l \perp x, \\ R_p \neq x &\equiv R_p < x \ \vee \ x < R_p \ \vee \ R_p \perp x, \\ \neg(H_m \perp x) &\equiv H_m < x \ \vee \ x < H_m \ \vee \ x = H_m. \end{aligned}$$

Подставляя в исходную формулу, раскрывая скобки и вынося дизъюнкции за скобки, получаем

$$\bigvee_{s\in\mathcal{S}} \exists x\Big(\bigwedge_i A_i < x \wedge \bigwedge_j x < B_j \wedge \bigwedge_k F_k^C(x) \wedge \bigwedge_l F_l^D(x) \\ \wedge \bigwedge_n E_n \perp x \wedge \bigwedge_m F_m^H(x) \wedge \bigwedge_p F_p^R(x) \wedge \bigwedge_t G_t = x\Big), \qquad (1)$$

где

$$F_k^C(x) \in \{C_k < x,\ C_k = x,\ C_k \perp x\},\ F_l^D(x) \in \{x < D_l,\ x = D_l, D_l \perp x\},$$

$$F_m^H(x) \in \{H_m < x,\ x < H_m,\ x = H_m\},\ F_p^R(x) \in \{R_p < x,\ x < R_p,\ R_p \perp x\}$$

и $\mathcal{S}$ обозначает множество всех последовательностей

$$(\dots, F_k^C(x), \dots, F_l^D(x), \dots, F_m^H(x), \dots, F_p^R(x), \dots).$$

Рассмотрим все конъюнкции, где есть хотя бы одна формула вида $x = T$. В таких конъюнкциях замена квантора существования осуществляется заменой x на T, т.е:

$$\exists x\big(\dots \wedge x = T \wedge \dots\big) \quad \equiv \quad \big(\dots \wedge \dots\big)\big|_{x=T}.$$

Таким образом, остается рассмотреть элиминацию кванторов только в конъюнкциях не содержащих равенств. Тем самым каждая конъюнкция эквивалентна некоторой формуле вида:

$$\bigwedge_i A_i' < x \ \wedge\ \bigwedge_j x < B_j' \ \wedge\ \bigwedge_n E_n' \perp x.$$

Исходя из этого, получаем, что для элиминации кванторов во всей дизъюнкции (1) достаточно элиминировать квантор в произвольной формуле вида

$$\exists x\Big(\bigwedge_i A_i' < x \ \wedge\ \bigwedge_j x < B_j' \ \wedge\ \bigwedge_n E_n' \perp x\Big). \qquad \square$$

2. Теории подмножеств действительных чисел с минимальным элементом

Пусть $\mathfrak{M} = (\mathcal{X}, <, \perp)$ — структура в данном языке, где

$$\mathcal{X} := \big\{X \subseteq \mathbb{R} \ \big|\ \inf(X) \in X\big\}.$$

Определим отношения следующим образом:

$$A < B \ := \ \exists a \in A \ \ \forall b \in B : a < b,$$

$$A \perp B \ := \ \neg(A < B) \wedge \neg(B < A) \wedge A \neq B.$$

Выражение $A < B$ означает, что существует элемент a из A, который меньше любого элемента b из B, в свою очередь, $A \perp B$ означает, что A и B не равны и ни один элемент A не меньше всех элементов B и ни один элемент B не меньше всех элементов A.

Так как $\inf(X) \in X$, то $\inf(X) = \min(X)$. С помощью m_X обозначим $\min(X)$.

Утверждение 2. *В структуре $\mathfrak{M}$ для любых $A, B \in \mathcal{X}$ верно*

$$A < B \equiv m_A < m_B.$$

Доказательство. Докажем лемму слева направо. Пусть $A < B$, тогда существует $a_0 \in A$ такое, что для любого b из B верно $a_0 < b$. В частности, $a_0 < m_B$. Поскольку $m_A \leq a_0$, получаем $m_A < m_B$.

Докажем лемму справа налево. Пусть $m_A < m_B$, тогда для любого b из B верно, что $m_B \leq b$. Следовательно, для любого b из B верно, что $m_A < b$. Значит, существует $a = m_A$ из A такое, что для любого b из B $a < b$ и потому $A < B$. □

Утверждение 3. *В структуре $\mathfrak{M}$ для любых $A, B \in \mathcal{X}$ верно*

$$A \perp B \equiv m_A = m_B \wedge A \neq B.$$

Доказательство. Пользуясь леммой 2, получаем

$$\begin{aligned} A \perp B &\equiv \neg(A < B) \wedge \neg(B < A) \wedge A \neq B \\ &\equiv \neg(m_A < m_B) \wedge \neg(m_B < m_A) \wedge A \neq B. \end{aligned}$$

Условие $\neg(m_A < m_B) \wedge \neg(m_B < m_A)$ эквивалентно $m_A = m_B$, отсюда получаем

$$A \perp B \equiv m_A = m_B \wedge A \neq B.$$ □

Теорема 1. *Теория структуры $\mathfrak{M}$ допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство. Исходя из леммы 1, для элиминации кванторов в теории достаточно элиминировать кванторы в произвольной формуле Ψ вида:

$$\exists x\Big(\bigwedge_i A_i < x \wedge \bigwedge_j x < B_j \wedge \bigwedge_n E_n \perp x\Big).$$

Рассмотрим два случая: Ψ содержит литералы вида $E_n \perp x$ и Ψ не содержит таких литералов.

Случай 1: Ψ содержит литералы вида $E_n \perp x$. Пользуясь леммами 2 и 3, перепишем формулу

$$\begin{aligned} &\exists x\Big(\bigwedge_i A_i < x \wedge \bigwedge_j x < B_j \wedge \bigwedge_n E_n \perp x\Big) \\ &\equiv \exists x\Big(\bigwedge_i m_{A_i} < m_x \wedge \bigwedge_j m_x < m_{B_j} \wedge \bigwedge_n (m_{E_n} = m_x \wedge E_n \neq x)\Big) \\ &\equiv \exists x\Big(\bigwedge_i m_{A_i} < m_x \wedge \bigwedge_j m_x < m_{B_j} \wedge \bigwedge_n m_{E_n} = m_x \wedge \bigwedge_n E_n \neq x\Big). \end{aligned}$$

Заметим, что все минимумы E_n равны m_x, значит $m_{E_1} = m_{E_2} = \cdots = m_{E_k} = m_x$. Таким образом, m_x в формуле можно заменить на любой из минимумов E_n. Заменив m_x на m_{E_1}, получим:

$$\exists x\Big(\bigwedge_i m_{A_i} < m_{E_1} \wedge \bigwedge_j m_{E_1} < m_{B_j} \wedge \bigwedge_n m_{E_n} = m_{E_1} \wedge \bigwedge_n E_n \neq x \wedge m_x = m_{E_1}\Big).$$

Так как множество всех E_n конечно, то всегда найдется x такой, что для любого n верно, что $x \neq E_n$ и $m_x = m_{E_1}$. Исходя из этого,

$$\exists x\Big(\bigwedge_i m_{A_i} < m_{E_1} \wedge \bigwedge_j m_{E_1} < m_{B_j} \wedge \bigwedge_n m_{E_n} = m_{E_1} \wedge \bigwedge_n E_n \neq x \wedge m_x = m_{E_1}\Big)$$
$$\equiv \bigwedge_i m_{A_i} < m_{E_1} \wedge \bigwedge_j m_{E_1} < m_{B_j} \wedge \bigwedge_n m_{E_n} = m_{E_1}.$$

Теперь вернемся к исходным множествам

$$m_{A_i} < m_{E_1} \equiv A_i < E_1,$$
$$m_{E_1} < m_{B_j} \equiv E_1 < B_j,$$
$$m_{E_n} = m_{E_1} \equiv E_n \perp E_1 \vee E_n = E_1.$$

Подставляя, получаем

$$\bigwedge_i A_i < E_1 \wedge \bigwedge_j E_1 < B_j \wedge \bigwedge_n (E_n \perp E_1 \vee E_n = E_1),$$

что является искомой бескванторной формулой.

Случай 2: Ψ не содержит литералов вида $E_n \perp x$. Пользуясь леммой 2, перепишем формулу

$$\exists x\Big(\bigwedge_i A_i < x \wedge \bigwedge_j x < B_j\Big)$$
$$\equiv \exists x\Big(\bigwedge_i m_{A_i} < m_x \wedge \bigwedge_j m_x < m_{B_j}\Big).$$

Пусть $M := \max\{m_{A_i}\}$ и $N := \min\{m_{B_j}\}$. Тогда условие $\bigwedge_i m_{A_i} < m_x \wedge \bigwedge_j m_x < m_{B_j}$ равносильно $M < m_x < N$, что также эквивалентно условию $M < N$. Таким образом,

$$\exists x\Big(\bigwedge_i m_{A_i} < m_x \wedge \bigwedge_j m_x < m_{B_j}\Big) \equiv (M < N).$$

$M < N$ в свою очередь означает, что для любых i, j $m_{A_i} < m_{B_j}$. Следовательно,

$$(M < N) \equiv \bigwedge_i \bigwedge_j m_{A_i} < m_{B_j}.$$

Возвращаясь к исходным множествам, получаем

$$\bigwedge_i \bigwedge_j m_{A_i} < m_{B_j} \equiv \bigwedge_i \bigwedge_j A_i < B_j,$$

что является искомой бескванторной формулой. □

3. Теории подмножеств действительных чисел, ограниченных снизу

Далее естественным образом расширим задачу. Пусть $\mathfrak{M}^* = \left(\mathcal{X}, <, \perp, \underset{inf}{=}, L\right)$ является структурой в языке $\mathcal{L} = \left\{ <, \perp, \underset{inf}{=}, L\right\}$, где

$$\mathcal{X} := \left\{ X \subseteq \mathbb{R} \mid X \text{ ограничено снизу } \right\},$$

с теми же отношениями, что и ранее, с добавлением:

$$A \underset{inf}{=} B := \inf(A) = \inf(B),$$
$$L(A) := \inf(A) \in A.$$

Также введем несколько вспомогательных определений:

$$\begin{aligned} m_X &:= \inf(X), \\ A \underset{inf}{<} B &:= A \underset{inf}{=} B \wedge L(A) \wedge \neg L(B) \equiv m_A = m_B \wedge L(A) \wedge \neg L(B), \\ A \underset{inf}{\approx} B &:= A \underset{inf}{=} B \wedge \big(L(A) \wedge L(B) \vee \neg L(A) \wedge \neg L(B)\big) \\ &\equiv m_A = m_B \wedge \big(L(A) \wedge L(B) \vee \neg L(A) \wedge \neg L(B)\big). \end{aligned}$$

Формула $A \underset{inf}{<} B$ означает, что инфимумы A и B равны, инфимум A принадлежит A и инфимум B не принадлежит B. В свою очередь, $A \underset{inf}{\approx} B$ означает, что инфимумы A и B равны, и одновременно либо A и B содержат свои инфимумы, либо A и B не содержат свои инфимумы.

Утверждение 4. *В структуре $\mathfrak{M}^*$ для любых $A, B \in \mathcal{X}$ верно*

$$A < B \equiv m_A < m_B \ \vee \ A \underset{inf}{<} B.$$

Доказательство. Докажем лемму слева направо. Предположим, что $A < B$. Тогда существует $a \in A$ такой, что $a < b$ для любого $b \in B$. Далее рассмотрим два случая $m_A < m_B$ и $m_A = m_B$.

Случай 1: $m_A < m_B$. В этом случае очевидным образом получаем истинность формулы

$$m_A < m_B \vee A \underset{inf}{<} B.$$

Случай 2: $m_A = m_B$. Для того чтобы выполнялось $A < B$ необходимо, чтобы в произвольном промежутке $[m_A, m_A + \varepsilon)$, где ε — некоторое ненулевое число, существовало $a \in A$ такое, что $a < b$ для всех $b \in B$. Заметим, что на промежутке $(m_A, m_A + \varepsilon)$ такого элемента не существует. Пусть $a \in (m_A, m_A + \varepsilon)$, тогда если взять ε_0 такой, что $m_B + \varepsilon_0 < a$, то существует b из B в промежутке $(m_B, m_B + \varepsilon_0)$, для которого будет верно $b < m_B + \varepsilon_0 < a$. Значит, таким элементом должен быть сам m_A, тогда $a = m_A$. Для всех $b \in B$ условие $a < b$ выполнено только в случае, если $m_B \notin B$, что соответствует определению:

$$A \underset{inf}{<} B := m_A = m_B \wedge L(A) \wedge \neg L(B).$$

Таким образом, снова выполнено

$$m_A < m_B \vee A \underset{inf}{<} B.$$

Докажем лемму справа налево. Рассмотрим два случая $m_A < m_B$ и $A \underset{inf}{<} B$.

Случай 1: $m_A < m_B$. Возьмем ε такой, что $m_A + \varepsilon < m_B$, т.к. $m_A = \inf(A)$, то в промежутке $[m_A, m_A + \varepsilon)$ существует $a \in A$ такое, что $m_A \leq a < m_A + \varepsilon < m_B$ и, таким образом, $a < b$ для всех $b \in B$. Следовательно, $A < B$.

Случай 2: $A \underset{inf}{<} B$. По определению, $m_A = m_B$, $L(A)$ и $\neg L(B)$. Берем $a = m_A \in A$. Для любого $b \in B$ выполняется $b > m_B = a$, так как $m_B \notin B$. Следовательно, $A < B$. □

Утверждение 5. *В структуре* $\mathfrak{M}^*$ *для любых* $A, B \in \mathcal{X}$ *верно*

$$A \perp B \equiv A \underset{inf}{\approx} B \ \wedge \ A \neq B.$$

Доказательство. По определению:

$$A \perp B \ := \ \neg(A < B) \ \wedge \ \neg(B < A) \ \wedge \ A \neq B.$$

Из леммы 4 имеем:

$$A < B \ \equiv \ m_A < m_B \ \vee \ \big(m_A = m_B \wedge L(A) \wedge \neg L(B)\big).$$

Аналогично,

$$B < A \ \equiv \ m_B < m_A \ \vee \ \big(m_A = m_B \wedge L(B) \wedge \neg L(A)\big).$$

Подставим это в определение $A \perp B$:

$$\begin{aligned} A \perp B \equiv \neg\Big(& m_A < m_B \ \vee \ (m_A = m_B \wedge L(A) \wedge \neg L(B))\Big) \\ & \wedge \neg\Big(m_B < m_A \ \vee \ (m_A = m_B \wedge L(B) \wedge \neg L(A))\Big) \\ & \wedge A \neq B. \end{aligned}$$

Раскрываем отрицания:

$$\begin{aligned} A \perp B \equiv & \big(m_A \geq m_B\big) \wedge \neg\big(m_A = m_B \wedge L(A) \wedge \neg L(B)\big) \\ & \wedge \big(m_B \geq m_A\big) \wedge \neg\big(m_A = m_B \wedge L(B) \wedge \neg L(A)\big) \\ & \wedge A \neq B. \end{aligned}$$

Из условий $m_A \geq m_B$ и $m_B \geq m_A$ следует $m_A = m_B$. Тогда получаем:

$$A \perp B \equiv m_A = m_B \wedge \neg(L(A) \wedge \neg L(B)) \wedge \neg(L(B) \wedge \neg L(A)) \wedge A \neq B.$$

Раскрываем отрицания:

$$A \perp B \equiv m_A = m_B \wedge (\neg L(A) \vee L(B)) \wedge (\neg L(B) \vee L(A)) \wedge A \neq B.$$

Нетрудно проверить, что

$$(\neg L(A) \vee L(B)) \wedge (\neg L(B) \vee L(A))$$

эквивалентно

$$(L(A) \wedge L(B)) \ \vee \ (\neg L(A) \wedge \neg L(B)).$$

Следовательно,

$$A \perp B \equiv m_A = m_B \wedge \big((L(A) \wedge L(B)) \ \vee \ (\neg L(A) \wedge \neg L(B))\big) \wedge A \neq B.$$

По определению

$$A \underset{inf}{\approx} B := m_A = m_B \wedge \big((L(A) \wedge L(B)) \ \vee \ (\neg L(A) \wedge \neg L(B))\big).$$

Следовательно,

$$A \perp B \equiv A \underset{inf}{\approx} B \wedge A \neq B. \qquad \square$$

Теорема 2. *Теория структуры $\mathfrak{M}^*$ допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство. Исходя из леммы 1, для элиминации кванторов в теории достаточно элиминировать кванторы в произвольной формуле Ψ вида:

$$\exists x\Big(\bigwedge_i A_i < x \wedge \bigwedge_j x < B_j \wedge \bigwedge_n E_n \perp x \wedge \bigwedge_k H_k \underset{inf}{=} x \wedge \bigwedge_p \neg(F_p \underset{inf}{=} x) \wedge L^*(x)\Big),$$

где $L^*(x)$ — $L(x)$ или $\neg L(x)$.

Рассмотрим три случая: $L^*(x) = L(x)$, $L^*(x) = \neg L(x)$ и формула Ψ не содержит $L^*(x)$.

Случай 1: $L^*(x) = \neg L(x)$.

Подслучай 1.1: Ψ содержит литералы вида $E_n \perp x$. Пользуясь леммами 4 и 5 и тем, что $L^*(x) = \neg L(x)$, перепишем формулу:

$$\Psi \equiv \exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x \ \vee \ A_i \underset{inf}{<} x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j} \ \vee \ x \underset{inf}{<} B_j) \\ \wedge \bigwedge_n (E_n \underset{inf}{\approx} x \wedge E_n \neq x) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge \neg L(x)\Big).$$

Так как $\neg L(x)$, то $x \underset{inf}{<} B_j$ ложно для любого j, тем самым получаем:

$$\begin{aligned}&\exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x \ \vee\ A_i \underset{inf}{<} x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j} \ \vee\ x \underset{inf}{<} B_j)\\ &\quad\wedge \bigwedge_n (E_n \underset{inf}{\approx} x \wedge E_n \neq x) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge \neg L(x)\Big)\\ &\equiv \exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x \ \vee\ A_i \underset{inf}{<} x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j}) \wedge \bigwedge_n (E_n \underset{inf}{\approx} x \wedge E_n \neq x)\\ &\quad\wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge \neg L(x)\Big).\end{aligned}$$

Раскроем $\underset{inf}{<}$ и $\underset{inf}{\approx}$:

$$\begin{aligned}&\exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x \ \vee\ m_{A_i} = m_x \wedge L(A_i)) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j})\\ &\quad\wedge \bigwedge_n \big(m_{E_n} = m_x \wedge \neg L(E_n) \wedge E_n \neq x\big) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge \neg L(x)\Big).\end{aligned}$$

Заметим, что все инфимумы E_n равны m_x, значит $m_{E_1} = m_{E_2} = \cdots = m_{E_t} = m_x$. Тогда заменим m_x на m_{E_1}:

$$\begin{aligned}&\exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_{E_1} \ \vee\ m_{A_i} = m_{E_1} \wedge L(A_i)) \wedge \bigwedge_j (m_{E_1} < m_{B_j})\\ &\quad\wedge \bigwedge_n \big(m_{E_n} = m_{E_1} \wedge \neg L(E_n) \wedge E_n \neq x\big) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{E_1}\\ &\quad\wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{E_1}) \wedge \neg L(x) \wedge m_{E_1} = m_x\Big).\end{aligned}$$

Так как множество всех E_n конечно, то всегда найдется x такой, что для любого n верно $x \neq E_n$, $\neg L(x)$ и $m_x = m_{E_1}$. Исходя из этого,

$$\begin{aligned}&\exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_{E_1} \ \vee\ m_{A_i} = m_{E_1} \wedge L(A_i)) \wedge \bigwedge_j (m_{E_1} < m_{B_j})\\ &\quad\wedge \bigwedge_n \big(m_{E_n} = m_{E_1} \wedge \neg L(E_n) \wedge E_n \neq x\big) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{E_1}\\ &\quad\wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{E_1}) \wedge \neg L(x) \wedge m_{E_1} = m_x\Big)\\ &\equiv \bigwedge_i (m_{A_i} < m_{E_1} \ \vee\ m_{A_i} = m_{E_1} \wedge L(A_i)) \wedge \bigwedge_j (m_{E_1} < m_{B_j})\\ &\quad\wedge \bigwedge_n \big(m_{E_n} = m_{E_1} \wedge \neg L(E_n)\big) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{E_1} \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{E_1}) \equiv\end{aligned}$$

$$\equiv \bigwedge_i (m_{A_i} < m_{E_1} \ \vee \ m_{A_i} = m_{E_1} \wedge L(A_i) \wedge \neg L(E_1)) \wedge \bigwedge_j (m_{E_1} < m_{B_j})$$
$$\wedge \bigwedge_n \big(m_{E_n} = m_{E_1} \wedge \neg L(E_n)\big) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{E_1} \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{E_1})$$
$$\equiv \bigwedge_i (A_i < E_1) \wedge \bigwedge_j (E_1 < B_j \wedge \neg(B_j \underset{inf}{=} E_1) \wedge \bigwedge_n \big(E_n \underset{inf}{=} E_1 \wedge \neg L(E_n))$$
$$\wedge \bigwedge_k H_k \underset{inf}{=} E_1 \wedge \bigwedge_p \neg(F_p \underset{inf}{=} E_1),$$

что является искомой бескванторной формулой.

Подслучай 1.2: Ψ не содержит литералов вида $E_n \perp x$ и содержит литералы вида $H_k \underset{inf}{=} x$. Тогда, пользуясь леммой 4 и тем, что $L^*(x) = \neg L(x)$, перепишем формулу:

$$\Psi \equiv \exists x \Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x \ \vee \ A_i \underset{inf}{<} x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j} \ \vee \ x \underset{inf}{<} B_j) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x$$
$$\wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge \neg L(x) \Big)$$
$$\equiv \exists x \Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x \ \vee \ A_i \underset{inf}{<} x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j})$$
$$\wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge \neg L(x) \Big).$$

Раскроем $\underset{inf}{<}$:

$$\exists x \Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x \ \vee \ m_{A_i} = m_x \wedge L(A_i)) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j})$$
$$\wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge \neg L(x) \Big).$$

Заметим, что все инфимумы H_k равны m_x, значит $m_{H_1} = m_{H_2} = \cdots = m_{H_l} = m_x$. Тогда заменим m_x на m_{H_1}:

$$\exists x \Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_{H_1} \ \vee \ m_{A_i} = m_{H_1} \wedge L(A_i)) \wedge \bigwedge_j (m_{H_1} < m_{B_j})$$
$$\wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{H_1} \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{H_1}) \wedge \neg L(x) \wedge m_x = m_{H_1} \Big).$$

Также всегда найдется такой x, что инфимум x равен m_{H_1} и $\neg L(x)$. Из чего следует

$$\begin{aligned}
&\exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_{H_1} \ \vee\ m_{A_i} = m_{H_1} \wedge L(A_i)) \wedge \bigwedge_j (m_{H_1} < m_{B_j})\\
&\quad \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{H_1} \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{H_1}) \wedge \neg L(x) \wedge m_x = m_{H_1}\Big)\\
&\equiv \bigwedge_i (m_{A_i} < m_{H_1} \ \vee\ m_{A_i} = m_{H_1} \wedge L(A_i)) \wedge \bigwedge_j (m_{H_1} < m_{B_j})\\
&\quad \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{H_1} \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{H_1})\\
&\equiv \bigwedge_i \big((A_i < H_1 \wedge \neg(A_i \underset{inf}{=} H_1) \vee (A_i \underset{inf}{=} H_1 \wedge L(A_i))\big)\\
&\quad \wedge \bigwedge_j (H_1 < B_j \wedge \neg(H_1 \underset{inf}{=} B_j)) \wedge \bigwedge_k H_k \underset{inf}{=} H_1 \wedge \bigwedge_p \neg(F_p \underset{inf}{=} H_1),
\end{aligned}$$

что является искомой бескванторной формулой.

Подслучай 1.3: Ψ не содержит литералов вида $E_n \perp x$ и не содержит литералов вида $H_k \underset{inf}{=} x$. Тогда, пользуясь леммой 4 и тем, что $L^*(x) = \neg L(x)$, перепишем формулу:

$$\begin{aligned}
\Psi \equiv \exists x\Big(&\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x \ \vee\ m_{A_i} = m_x \wedge L(A_i)) \wedge\\
&\wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j}) \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge \neg L(x)\Big)\\
&\equiv \bigvee_{s\in\mathcal{S}} \exists x\Big(\bigwedge_i F_i^s(x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j}) \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge \neg L(x)\Big),
\end{aligned}$$

где $F_i^s(x) \in \{m_{A_i} < m_x,\ m_{A_i} = m_x \wedge L(A_i)\}$, а $\mathcal{S}$ — множество всех последовательностей $(\dots, F_i^s(x), \dots)$. Таким образом, достаточно элиминировать квантор в произвольной конъюнкции Θ вида:

$$\begin{aligned}
\exists x\Big(&\bigwedge_l m_{A_l} < m_x \wedge \bigwedge_r (m_{N_r} = m_x \wedge L(N_r)) \wedge\\
&\wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j}) \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge \neg L(x)\Big).
\end{aligned}$$

Пусть конъюнкция Θ содержит формулу $m_{N_k} = m_x \wedge L(N_k)$, тогда заменим m_x на m_{N_k}:

$$\begin{aligned}
\Theta \equiv \exists x\Big(&\bigwedge_l m_{A_l} < m_{N_k} \wedge \bigwedge_r (m_{N_r} = m_{N_k} \wedge L(N_r)) \wedge \bigwedge_j (m_{N_k} < m_{B_j})\\
&\wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{N_k}) \wedge \neg L(x) \wedge m_{N_k} = m_x\Big).
\end{aligned}$$

Также всегда найдется такой x, что инфимум x равен m_{N_k} и $\neg L(x)$. Из чего следует:

$$\begin{aligned}
&\exists x\Big(\bigwedge_l m_{A_l} < m_{N_k} \wedge \bigwedge_r (m_{N_r} = m_{N_k} \wedge L(N_r)) \wedge \bigwedge_j (m_{N_k} < m_{B_j}) \\
&\quad \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{N_k}) \wedge \neg L(x) \wedge m_{N_k} = m_x\Big) \\
&\equiv \bigwedge_l m_{A_l} < m_{N_k} \wedge \bigwedge_r (m_{N_r} = m_{N_k} \wedge L(N_r)) \wedge \bigwedge_j (m_{N_k} < m_{B_j}) \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{N_k}) \\
&\equiv \bigwedge_l (A_l < N_k \wedge \neg(A_l \underset{inf}{=} N_k)) \wedge \bigwedge_r (N_r \underset{inf}{=} N_k \wedge L(N_r)) \\
&\quad \wedge \bigwedge_j (N_k < B_j \wedge \neg(N_k \underset{inf}{=} B_j)) \wedge \bigwedge_p \neg(F_p \underset{inf}{=} N_k),
\end{aligned}$$

что является искомой бескванторной формулой.

Пусть конъюнкция Θ не содержит формул $m_{N_k} = m_x \wedge L(N_k)$, тогда

$$\Theta \equiv \exists x\Big(\bigwedge_l (m_{A_l} < m_x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j}) \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge \neg L(x)\Big).$$

Пусть $M := \max(m_{A_l})$ и $N := \min(m_{B_j})$. Условие

$$\bigwedge_l (m_{A_l} < m_x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j})$$

эквивалентно условию $M < m_x < N$. Так как множество всех F_p конечно, то всегда найдется x такой, что $M < m_x < N$, для любого F_p выполнено $m_{F_p} \neq m_x$ и $\neg L(x)$. Тем самым, получаем:

$$\begin{aligned}
\Theta &\equiv \exists x\Big(\bigwedge_l (m_{A_l} < m_x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j}) \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge \neg L(x)\Big) \equiv M < N \\
&\equiv \bigwedge_l \bigwedge_j (m_{A_l} < m_{B_j}) \equiv \bigwedge_l \bigwedge_j (A_l < B_j \wedge \neg(A_l \underset{inf}{=} B_j)),
\end{aligned}$$

что является искомой бескванторной формулой.

Случай 2: $L^*(x) = L(x)$.

Подслучай 2.1: Ψ содержит литералы вида $E_n \perp x$. Пользуясь леммами 4 и 5 и тем, что $L^*(x) = L(x)$, перепишем формулу:

$$\begin{aligned}
\Psi \equiv \exists x\Big(&\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x \ \vee \ A_i \underset{inf}{<} x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j} \ \vee \ x \underset{inf}{<} B_j) \\
&\wedge \bigwedge_n (E_n \underset{inf}{\approx} x \wedge E_n \neq x) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge L^*(x)\Big).
\end{aligned}$$

Так как $L(x)$, то $A_i \underset{inf}{<} x$ ложно для любого i, тем самым получаем:

$$\begin{aligned}
&\exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x \ \vee \ A_i \underset{inf}{<} x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j} \ \vee \ x \underset{inf}{<} B_j) \\
&\quad \wedge \bigwedge_n (E_n \underset{inf}{\approx} x \wedge E_n \neq x) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge L^*(x)\Big) \\
\equiv\ &\exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j} \ \vee \ x \underset{inf}{<} B_j) \wedge \bigwedge_n (E_n \underset{inf}{\approx} x \wedge E_n \neq x) \\
&\quad \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge L(x)\Big).
\end{aligned}$$

Раскроем $\underset{inf}{<}$ и $\underset{inf}{\approx}$:

$$\begin{aligned}
&\exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j} \ \vee \ m_x = m_{B_j} \wedge \neg L(B_j)) \\
&\quad \wedge \bigwedge_n \big(m_{E_n} = m_x \wedge L(E_n) \wedge E_n \neq x\big) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge L(x)\Big).
\end{aligned}$$

Заметим, что все инфимумы E_n равны m_x, значит $m_{E_1} = m_{E_2} = \cdots = m_{E_t} = m_x$. Тогда заменим m_x на m_{E_1}:

$$\begin{aligned}
&\exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_{E_1}) \wedge \bigwedge_j (m_{E_1} < m_{B_j} \ \vee \ m_{E_1} = m_{B_j} \wedge \neg L(B_j)) \\
&\quad \wedge \bigwedge_n \big(m_{E_n} = m_{E_1} \wedge L(E_n) \wedge E_n \neq x\big) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{E_1} \\
&\quad \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{E_1}) \wedge L(x) \wedge m_{E_1} = m_x\Big).
\end{aligned}$$

Так как множество всех E_n конечно, то всегда найдется x такой, что для любого n верно $x \neq E_n$, $L(x)$ и $m_x = m_{E_1}$. Исходя из этого,

$$\begin{aligned}
&\exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_{E_1}) \wedge \bigwedge_j (m_{E_1} < m_{B_j} \ \vee \ m_{E_1} = m_{B_j} \wedge \neg L(B_j)) \\
&\quad \wedge \bigwedge_n \big(m_{E_n} = m_{E_1} \wedge L(E_n) \wedge E_n \neq x\big) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{E_1} \\
&\quad \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{E_1}) \wedge L(x) \wedge m_{E_1} = m_x\Big) \\
\equiv &\bigwedge_i (m_{A_i} < m_{E_1}) \wedge \bigwedge_j (m_{E_1} < m_{B_j} \ \vee \ m_{E_1} = m_{B_j} \wedge \neg L(B_j)) \\
&\quad \wedge \bigwedge_n \big(m_{E_n} = m_{E_1} \wedge L(E_n)\big) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{E_1} \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{E_1}) \\
\equiv &\bigwedge_i (m_{A_i} < m_{E_1}) \wedge \bigwedge_j (m_{E_1} < m_{B_j} \ \vee \ m_{E_1} = m_{B_j} \wedge L(E_1) \wedge \neg L(B_j)) \\
&\quad \wedge \bigwedge_n \big(m_{E_n} = m_{E_1} \wedge L(E_n)\big) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{E_1} \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{E_1}) \equiv
\end{aligned}$$

$$\equiv \bigwedge_i (A_i < E_1 \wedge \neg(A_i \underset{inf}{=} E_1)) \wedge \bigwedge_j (E_1 < B_j) \wedge \bigwedge_n \big(E_n \underset{inf}{=} E_1 \wedge L(E_n)\big)$$
$$\wedge \bigwedge_k H_k \underset{inf}{=} E_1 \wedge \bigwedge_p \neg(F_p \underset{inf}{=} E_1),$$

что является искомой бескванторной формулой.

Подслучай 2.2: Ψ не содержит литералов вида $E_n \perp x$ и содержит литералы вида $H_k \underset{inf}{=} x$. Тогда, пользуясь леммой 4 и тем, что $L^*(x) = L(x)$, перепишем формулу:

$$\Psi \equiv \exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x \ \vee\ A_i \underset{inf}{<} x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j} \ \vee\ x \underset{inf}{<} B_j) \wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x$$
$$\wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge L(x)\Big)$$
$$\equiv \exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j} \ \vee\ x \underset{inf}{<} B_j)$$
$$\wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge L(x)\Big).$$

Раскроем $\underset{inf}{<}$:

$$\exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j} \ \vee\ m_x = m_{B_j} \wedge \neg L(B_j))$$
$$\wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_x \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge L(x)\Big).$$

Заметим, что все инфимумы H_k равны m_x, значит $m_{H_1} = m_{H_2} = \cdots = m_{H_l} = m_x$. Тогда заменим m_x на m_{H_1}:

$$\exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_{H_1}) \wedge \bigwedge_j (m_{H_1} < m_{B_j} \ \vee\ m_{H_1} = m_{B_j} \wedge \neg L(B_j))$$
$$\wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{H_1} \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{H_1}) \wedge L(x) \wedge m_x = m_{H_1}\Big).$$

Также всегда найдется такой x, что инфимум x равен m_{H_1} и $L(x)$. Из чего следует:

$$\exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_{H_1}) \wedge \bigwedge_j (m_{H_1} < m_{B_j} \ \vee\ m_{H_1} = m_{B_j} \wedge \neg L(B_j))$$
$$\wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{H_1} \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{H_1}) \wedge L(x) \wedge m_x = m_{H_1}\Big)$$
$$\equiv \bigwedge_i (m_{A_i} < m_{H_1}) \wedge \bigwedge_j (m_{H_1} < m_{B_j} \ \vee\ m_{H_1} = m_{B_j} \wedge \neg L(B_j))$$
$$\wedge \bigwedge_k m_{H_k} = m_{H_1} \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{H_1}) \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_i \big((A_i < H_1 \wedge \neg(A_i \underset{inf}{=} H_1)\big) \wedge \bigwedge_j (H_1 < B_j \wedge \neg\big(H_1 \underset{inf}{=} B_j) \vee (H_1 \underset{inf}{=} B_j \wedge \neg L(B_j))\big)\big)$$
$$\wedge \bigwedge_k H_k \underset{inf}{=} H_1 \wedge \bigwedge_p \neg(F_p \underset{inf}{=} H_1),$$

что является искомой бескванторной формулой.

Подслучай 2.3: Ψ не содержит литералов вида $E_n \perp x$ и не содержит литералов вида $H_k \underset{inf}{=} x$. Тогда, пользуясь леммой 4 и тем, что $L^*(x) = L(x)$, перепишем формулу:

$$\Psi \equiv \exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j} \ \vee \ m_x = m_{B_j} \wedge \neg L(B_j))\wedge$$
$$\wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge L(x)\Big) \equiv$$
$$\equiv \bigvee_{s\in\mathcal{S}} \exists x\Big(\bigwedge_i (m_{A_i} < m_x) \wedge \bigwedge_j F^s_j(x) \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge L(x)\Big).$$

где $F^s_j(x) \in \{m_x < m_{B_j},\ m_x = m_{B_j} \wedge \neg L(B_j)\}$, а $\mathcal{S}$ — множество всех последовательностей $(\dots, F^s_j(x), \dots)$. Таким образом, достаточно элиминировать квантор в произвольной конъюнкции Θ вида:

$$\exists x\Big(\bigwedge_i m_{A_i} < m_x \wedge \bigwedge_l (m_x < m_{B_l}) \wedge \bigwedge_r (m_x = m_{N_r} \wedge \neg L(N_r))\wedge$$
$$\wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge L(x)\Big).$$

Пусть конъюнкция Θ содержит формулу $m_x = m_{N_k} \wedge \neg L(N_k)$, тогда заменим m_x на m_{N_k}:

$$\Theta \equiv \exists x\Big(\bigwedge_l m_{A_l} < m_{N_k} \wedge \bigwedge_j (m_{N_k} < m_{B_j}) \wedge \bigwedge_r (m_{N_k} = m_{N_r} \wedge \neg L(N_r))$$
$$\wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{N_k}) \wedge L(x) \wedge m_{N_k} = m_x\Big).$$

Также всегда найдется такой x, что инфимум x равен m_{N_k} и $L(x)$. Из чего следует

$$\exists x\Big(\bigwedge_l m_{A_l} < m_{N_k} \wedge \bigwedge_j (m_{N_k} < m_{B_j}) \wedge \bigwedge_r (m_{N_k} = m_{N_r} \wedge \neg L(N_r))$$
$$\wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{N_k}) \wedge L(x) \wedge m_{N_k} = m_x\Big)$$
$$\equiv \bigwedge_l m_{A_l} < m_{N_k} \wedge \bigwedge_j (m_{N_k} < m_{B_j}) \wedge \bigwedge_r (m_{N_k} = m_{N_r} \wedge \neg L(N_r)) \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_{N_k})$$
$$\equiv \bigwedge_l (A_l < N_k \wedge \neg(A_l \underset{inf}{=} N_k)) \wedge \bigwedge_j (N_k < B_j \wedge \neg(N_k \underset{inf}{=} B_j))$$
$$\wedge \bigwedge_r (N_r \underset{inf}{=} N_k \wedge \neg L(N_r)) \wedge \bigwedge_p \neg(F_p \underset{inf}{=} N_k),$$

что является искомой бескванторной формулой.

Пусть конъюнкция Θ не содержит формул $m_{N_k} = m_x \wedge L(N_k)$, тогда

$$\Theta \equiv \exists x\Big(\bigwedge_l (m_{A_l} < m_x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j}) \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge L(x)\Big).$$

Пусть $M := \max(m_{A_l})$ и $N := \min(m_{B_j})$. Условие

$$\bigwedge_l (m_{A_l} < m_x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j})$$

эквивалентно условию $M < m_x < N$. Так как множество всех F_p конечно, то всегда найдется x такой, что $M < m_x < N$, для любого F_p выполнено $m_{F_p} \neq m_x$ и $L(x)$. Тем самым, получаем:

$$\begin{aligned}\Theta &\equiv \exists x\Big(\bigwedge_l (m_{A_l} < m_x) \wedge \bigwedge_j (m_x < m_{B_j}) \wedge \bigwedge_p \neg(m_{F_p} = m_x) \wedge L(x)\Big) \equiv M < N \\ &\equiv \bigwedge_l \bigwedge_j (m_{A_l} < m_{B_j}) \equiv \bigwedge_l \bigwedge_j (A_l < B_j \wedge \neg(A_l \underset{inf}{=} B_j)),\end{aligned}$$

что является искомой бескванторной формулой.

Случай 3: Ψ не содержит $L^*(x)$.

Заметим, что в таком случае имеет место следующая эквивалентность

$$\begin{aligned}\Psi \equiv \exists x\Phi &\equiv \exists x\big((\Phi \wedge L(x)) \vee (\Phi \wedge \neg L(x))\big) \\ &\equiv \exists x(\Phi \wedge L(x)) \vee \exists x(\Phi \wedge \neg L(x)).\end{aligned}$$

Так как для формул $\exists x(\Phi \wedge \neg L(x))$ и $\exists x(\Phi \wedge L(x))$ доказано существование бескванторных эквивалентов в случаях 1 и 2 соответственно, получаем, что Ψ эквивалентно дизъюнкции соответствующих бескванторных формул, что является искомой бескванторной формулой. □

Заключение

В статье показано, что теория частичного порядка в языке $L = \{<, \perp\}$, заданная системой аксиом с взаимоисключающими типами отношений, допускает элиминацию кванторов для некоторых структур, состоящих из подмножеств действительных чисел. Основная идея состоит в сведении общей задачи элиминации кванторов к более простой задаче — устранению кванторов в формулах специального вида, что существенно упрощает процесс преобразования формул.

Отдельно рассматриваются две конкретные структуры: подмножества действительных чисел с минимальным элементом и подмножества действительных чисел, ограниченные снизу. Для этих структур отношения порядка и несравнимости выражаются через минимумы и инфимумы соответственно. Это позволяет явно построить бескванторные формулы, эквивалентные любой формуле с квантором существования в рамках рассматриваемой теории.

Тем самым получен конструктивный результат: показано, что в определённом классе структур теории частичного порядка с отношением несравнимости возможна элиминация кванторов. Полученные результаты уточняют характер взаимодействия отношений порядка и несравнимости и могут служить основой для дальнейшего исследования теоретических свойств подобных структур.

В качестве дальнейших направлений исследования можно рассмотреть расширение полученных результатов на более широкий класс структур частичного порядка, например, на структуры без требования существования минимального элемента или нижней границы. Представляет интерес изучение элиминации кванторов для других языковых расширений теории, а также исследование теоретико-модельных свойств подобных структур и возможных связей с другими теориями.

Список литературы

[1] Авхимович Н.В. О разрешимости теории конечных подмножеств для дискретного линейного порядка // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 91–104. https://doi.org/10.26456/vtpmk646

[2] Чэн Ч.Ч., Кейслер Г. Теория моделей. М.: Мир, 1977. 614 с.

[3] Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.

[4] Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. М.: МЦНМО, 2012. 112 с.

[5] Дудаков С.М. Основы теории моделей. Тверь: Твер. гос. ун-т, 2013. 480 с.

Образец цитирования

Первых И.М. Об элиминации кванторов в некоторых теориях частичного порядка // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 2. С. 18–36. https://doi.org/10.26456/vtpmk774

Сведения об авторах

1. **Первых Илья Михайлович**
аспирант кафедры информатики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ.
E-mail: perchenchen@yandex.ru

ON QUANTIFIER ELIMINATION IN SOME PARTIAL ORDER THEORIES

Pervykh I.M.
Tver State University, Tver

Received 24.03.2026, revised 10.04.2026.

In the article, we investigate a quantifier elimination problem for partial order theories in languages that contain strict order and incomparability relations. Structures are considered those that consist of lower-bounded real number sets. For each of these structures, it is shown that the corresponding theory admits effective quantifier elimination. These results expand the class of known structures whose theories admit effective quantifier elimination.

Keywords: first-order logic, quantifier elimination, partial order theory.

Citation

Pervykh I.M., "On quantifier elimination in some partial order theories", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2026, № 2, 18–36 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk774

References

[1] Avkhimovich N.V., "On decidability of finite subsets' theory for discrete linear order", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, №3, 91–104 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk646.

[2] Chen Ch.Ch., Kejsler G., *Teoriya modelej [Model theory]*, Mir Publ., Moscow, 1977 (in Russian), 614 pp.

[3] Boolos G.S., Jeffrey R.C., *Computability and Logic*, Third Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[4] Vereshhagin N.K., Shen A., *Lektsii po matematicheskoj logike i teorii algoritmov [Lectures on mathematical logic and theory of algorithms]*, MTsNMO, Moscow, 2012, 112 pp.

[5] Dudakov S.M., *Osnovy teorii modelej [Fundamentals of model theory]*, Tver State University, Tver, 2013 (in Russian), 480 pp.

Author Info

1. **Pervykh Ilya Mikhailovich**
PhD student of the Department of Computer Science, Tver State University.

Russia, 170100, Tver, Zhelyabova st., 33, Tver State University.
E-mail: perchenchen@yandex.ru