

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519.63

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ

Бештоков М.Х.

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского  
научного центра РАН, г. Нальчик

---

*Поступила в редакцию 12.04.2025, после переработки 25.11.2025.*

---

Исследована третья начально-краевая задача для уравнения колебания струны с эффектом памяти. Методом энергетических неравенств для решения исходной дифференциальной задачи получена априорная оценка в дифференциальной форме. Построена разностная схема второго порядка аппроксимации по параметрам сетки и получена априорная оценка в разностной форме. Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью равной порядку аппроксимации разностной схемы. Проведены численные расчёты тестового примера, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

**Ключевые слова:** третья краевая задача, уравнение колебания струны, эффект памяти, предыстория, разностная схема, априорная оценка, устойчивость и сходимость разностных схем.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 2. С. 37–55.*  
<https://doi.org/10.26456/vtpmk741>

### Введение

Уравнение колебания струны, также известное как волновое уравнение второго порядка, является важным математическим инструментом, который описывает динамику колебаний в одномерных системах. Это уравнение формулируется так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где  $u(x, t)$  — смещение струны в точке  $x$  в момент времени  $t$ , а  $v$  — скорость распространения волн по струне.

---

© Бештоков М.Х., 2026

Актуальность этого уравнения прослеживается во многих областях науки, например, в инженерии уравнение колебания струны используется для анализа вибраций и динамики конструкций и иных механических систем. Это особенно важно при проектировании зданий, мостов и других сооружений, которые подвержены внешним воздействиям, таким как ветер или землетрясения [1, 2].

Уравнение колебания струны также находит применение в физике плазмы, акустики и гидродинамике. Исследователи используют его для моделирования и анализа волновых процессов в различных средах, что способствует лучшему пониманию сложных физических явлений, таких как распространение звука в атмосфере или волны в океане [3–5].

Многие математические модели, описывающие колебания, могут учитывать предыдущее состояние системы. В этом случае часто рассматриваются интегрально-дифференциальные уравнения, в которых текущее состояние зависит от интеграла предшествующих состояний. Это позволяет моделировать более сложные динамические системы, где эффект памяти имеет значительное влияние, например, в моделях с накоплением деформаций или диссипацией энергии.

Эффект памяти в контексте уравнения колебания струны может быть связан с различными физическими механизмами, такими как нелинейные эффекты, диссипация энергии и взаимодействия в материале струны. Например, в случае, когда амплитуда колебания струны становится значительной, могут возникать нелинейные эффекты. Это может привести к тому, что колебания не будут следовать простым гармоническим законам, и предыдущее состояние струны (например, её деформация) может влиять на последующие колебания. Такие нелинейные эффекты могут приводить к изменению частоты колебаний в зависимости от амплитуды [6–8].

В настоящей работе исследуется начально-краевая задача для уравнения колебания струны с эффектом памяти и граничными условиями третьего рода. Интегральное слагаемое в уравнении служит упрощённым инструментом, позволяющим выделить и проанализировать влияние памяти и накопленных эффектов на колебания в условиях, когда полное нелинейное моделирование сложно или избыточно.

Для приближённого решения исследуемой задачи построена разностная схема второго порядка аппроксимации по пространственному и временному шагам. Работа структурирована следующим образом:

- в первом параграфе ставится рассматриваемая задача;
- во втором параграфе методом энергетических неравенств получена априорная оценка в дифференциальной форме;
- в третьем параграфе — построена разностная схема и получена аналогичная оценка в разностной форме (из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимости решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации);
- в четвёртом параграфе проведены численные расчёты тестового примера, иллюстрирующие полученные теоретические результаты.

Работы [9–11] посвящены приближенным методам решения краевых задач для уравнения колебания струны.

### 1. Постановка задачи

В замкнутом прямоугольнике  $\overline{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  рассмотрим третью краевую задачу для интегро-дифференциального волнового уравнения

$$u_{tt} + \int_0^t \rho(x, t, \xi)u(x, \xi)d\xi = (ku_x)_x - qu + f(x, t), \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$k(0, t)u_x(0, t) = \beta_1(t)u(0, t) - \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$-k(l, t)u_x(l, t) = \beta_2(t)u(l, t) - \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

где

$$0 < c_0 \leq k(x, t), q(x, t), \beta_1(t), \beta_2(t) \leq c_1, \quad |\rho, k_t, q_t, \beta_{1t}, \beta_{2t}| \leq c_2, \quad 0 \leq \xi \leq t, \quad (5)$$

$u(x, t) \in C^{4,4}(\overline{Q}_T)$ ,  $k(x, t) \in C^{3,1}(\overline{Q}_T)$ ,  $\rho(x, t, t), q(x, t), f(x, t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ ,

$\beta_1(t), \beta_2(t), \mu_1(t), \mu_2(t) \in C^1[0, T]$ ,  $u_0(x) \in C^2[0, l]$ ,  $u_1(x)$  – непрерывная функция.

Интегральный член с ядром памяти  $\rho(x, t, \xi)$  моделирует «эффект памяти» или «накопленные эффекты», где система «помнит» прошлые значения  $u(x, \xi)$  (отклонение в прошлом моменте  $\xi$ ). Эффект памяти в интеграле делает задачу более сложной, чем классическое волновое уравнение. Ядро  $\rho$  определяет, как сильно влияют прошлые состояния на текущее (например, может быть функцией, учитывающей затухание или нелинейность),  $k(x, t)$  – коэффициент жёсткости или растяжения струны,  $q(x, t)$  – коэффициент, моделирующий трение или потерю энергии, которое замедляет колебания,  $f(x, t)$  – внешняя сила или источник, действующий на струну.

Данная работа является продолжением серии работ автора [12]– [15], посвященных исследованию краевых задач для различных дифференциальных уравнений с эффектом памяти.

В дальнейшем изложении предполагается, что решение  $u(x, t) \in C^{4,4}(\overline{Q}_T)$  задачи (1)-(4) существует.

### 2. Априорная оценка в дифференциальной форме

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия ограниченности и гладкости (5), тогда для решения исходной задачи (1)-(4) справедлива априорная оценка

$$\begin{aligned} \|u_t\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 \leq M \left[ \int_0^t (\|f\|_0^2 d\tau + \mu_{1\tau}^2(\tau) + \mu_{2\tau}^2(\tau)) d\tau + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + \right. \\ \left. + \|u_1(x)\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2 \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $M$  – положительная постоянная, зависящая только от входных данных задачи (1)-(4).

*Доказательство.* Априорную оценку (6) решения поставленной задачи (1)-(4) найдём методом энергетических неравенств, для этого умножим (1) скалярно на  $u_t(x, t)$ :

$$(u_{tt}, u_t) + \left( \int_0^t \rho(x, t, \xi) u(x, \xi) d\xi, u_t \right) = ((ku_x)_x, u_t) - (qu, u_t) + (f(x, t), u_t), \quad (7)$$

где скалярное произведение и нормы вводятся следующим образом:

$$(u, v) = \int_0^l uv dx, \quad \|u\|_0^2 = \int_0^l u^2 dx, \quad (1, u^2) = \|u\|_0^2.$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (7):

$$(u_{tt}, u_t) = \left( \frac{1}{2}, (u_t^2)_t \right) = \frac{1}{2} (\|u_t\|_0^2)_t. \quad (8)$$

Оценим второе слагаемое в левой части (7), используя  $\varepsilon$ - неравенство Коши и неравенство Коши-Буняковского

$$\begin{aligned} - \left( \int_0^t \rho(x, t, \xi) u(x, \xi) d\xi, u_t \right) &\leq \left( \frac{1}{2}, \left( \int_0^t \rho(x, t, \xi) u(x, \xi) d\xi \right)^2 + u_t^2 \right) \leq \left( \frac{1}{2}, u_t^2 \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{2}, \int_0^t \rho^2(x, t, \xi) d\xi \int_0^t u^2 d\tau \right) = \frac{1}{2} \|u_t\|_0^2 + M_1 \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (7), тогда получим

$$\begin{aligned} ((ku_x)_x, u_t) &= - (ku_x, u_{xt}) + ku_x u_t|_{x=l} - ku_x u_t|_{x=0} = \\ &= - \left( \frac{k}{2}, (u_x^2)_t \right) + (\mu_2(t) - \beta_2(t)u(l, t)) u_t(l, t) + (\mu_1(t) - \beta_1(t)u(0, t)) u_t(0, t) = \\ &= - \frac{1}{2} (k, u_x^2)_t + \frac{1}{2} (k_t, u_x^2) + (\mu_2(t)u(l, t))_t - \frac{1}{2} (\beta_2(t)u^2(l, t))_t + (\mu_1(t)u(0, t))_t - \\ &- \frac{1}{2} (\beta_1(t)u^2(0, t))_t + \frac{1}{2} \beta_{2t}(t)u^2(l, t) + \frac{1}{2} \beta_{1t}(t)u^2(0, t) - \mu_{2t}(t)u(l, t) - \mu_{1t}(t)u(0, t). \end{aligned} \quad (10)$$

Оценим второе и третье слагаемые в правой части (7) с помощью  $\varepsilon$ - неравенства Коши, тогда имеем

$$- (qu, u_t) = - \int_0^l qu u_t dx = - \left( \frac{q}{2}, (u^2)_t \right) = - \left( \frac{q}{2}, u^2 \right)_t + \left( \frac{qt}{2}, u^2 \right), \quad (11)$$

$$(f(x, t), u_t) \leq \left( \frac{1}{2}, f^2 \right) + \left( \frac{1}{2}, u_t^2 \right) = \frac{1}{2} \|f\|_0^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|_0^2. \quad (12)$$

Принимая во внимание оценки (8)-(12), из (7) находим

$$(\|u_t\|_0^2)_t + (k, u_x^2)_t + (\beta_1(t)u^2(0, t))_t + (\beta_2(t)u^2(l, t))_t + (q, u^2)_t \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq 2(\mu_1(t)u(0,t))_t + 2(\mu_2(t)u(l,t))_t + 2\|u_t\|_0^2 + 2M_1 \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + (k_t, u_x^2) + (q_t, u^2) + \\ &\quad + \beta_1(t)u^2(0,t) + \beta_2(t)u^2(l,t) - 2\mu_{2t}(t)u(l,t) - 2\mu_{1t}(t)u(0,t) + \|f\|_0^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Проинтегрируем (13) по  $\tau$  от 0 до  $t$ , тогда получим

$$\begin{aligned} &\|u_t\|_0^2 + c_0 (\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 + u^2(0,t) + u^2(l,t)) \leq 2\mu_1(t)u(0,t) + 2\mu_2(t)u(l,t) + \\ &\quad + M_2 \int_0^t \left( \|u_t\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 + u^2(0,t) + u^2(l,t) + \int_0^\tau \|u\|_0^2 ds \right) d\tau + \\ &\quad + M_3 \left( \int_0^t \|f\|_0^2 + \mu_{1\tau}^2(\tau) + \mu_{2\tau}^2(\tau) \right) d\tau + \|u_1(x)\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Оценим первое и второе слагаемые в правой части (14) с помощью  $\varepsilon$ - неравенства Коши:

$$\mu_1(t)u(0,t) \leq \varepsilon u^2(0,t) + \frac{1}{4\varepsilon} \mu_1^2(t), \quad \mu_2(t)u(l,t) \leq \varepsilon u^2(l,t) + \frac{1}{4\varepsilon} \mu_2^2(t).$$

Слагаемое

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau \|u(x,s)\|_0^2 ds$$

оценим следующим образом

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau \|u\|_0^2 ds \leq T \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau. \quad (15)$$

Выбирая  $\varepsilon = \frac{c_0}{2}$  и учитывая (15), из (14) находим

$$\begin{aligned} &\|u_t\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 + u^2(0,t) + u^2(l,t) \leq \\ &\leq M_4 \int_0^t (\|u_\tau\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 + u^2(0,t) + u^2(l,t)) d\tau + \\ &\quad + M_5 \left[ \int_0^t (\|f\|_0^2 + \mu_{1\tau}^2(\tau) + \mu_{2\tau}^2(\tau)) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + \|u_1(x)\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2 \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

где  $M_i$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) здесь и далее по тексту положительные постоянные, зависящие только от входных данных задачи (1)-(4).

Применим к (16) лемму Гронуолла (лемма 5.5 [16], с. 112) и получим оценку (6).  $\square$

Из априорной оценки (6) следуют единственность и устойчивость решения задачи (1)–(4).

### 3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

В замкнутом прямоугольнике  $\bar{Q}_T$  введём равномерную сетку  $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ , где

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = \frac{l}{N} \right\}, \quad \bar{\omega}_\tau = \left\{ t_j = j\tau, j = \overline{0, j_0}, \tau = \frac{T}{j_0} \right\}.$$

Задаче (1)–(4) поставим в соответствие разностную схему второго порядка аппроксимации по  $h$  и  $\tau$ :

$$y_{\bar{t}\bar{t}} + \sum_{s=0}^j \bar{\rho}_i^{j,s} y_i^s \bar{\tau} = \Lambda y^{(\sigma,\sigma)} + \varphi, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq t \leq j_0-1, \quad (17)$$

$$y_{\bar{t}\bar{t},0} + \sum_{s=0}^j \bar{\rho}_0^{j,s} y_0^s \bar{\tau} = \frac{1}{0,5h} \Lambda^- y_0^{(\sigma,\sigma)} + \frac{1}{0,5h} \bar{\mu}_1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18)$$

$$y_{\bar{t}\bar{t},N} + \sum_{s=0}^j \bar{\rho}_N^{j,s} y_N^s \bar{\tau} = \frac{1}{0,5h} \Lambda^+ y_N^{(\sigma,\sigma)} + \frac{1}{0,5h} \bar{\mu}_2, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (19)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \bar{u}_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda y &= (ay_{\bar{x}}) - dy, \quad \Lambda^- y_0 = a_1 y_{x,0} - \bar{\beta}_1 y_0, \quad \Lambda^+ y_N = -a_N y_{\bar{x},N} - \bar{\beta}_2 y_N, \\ a &= k(x_{i-\frac{1}{2}}, t_j), \quad a^{(-1)} = k(x_{i-\frac{1}{2}}, t_{j-1}), \quad \varphi = f(x_i, t_j), \quad \bar{\rho}_i^{j,s} = \rho(x_i, t_j, t_s), \\ \hat{y} &= y^{j+1}, \quad \check{y} = y^{j-1}, \quad d = q(x_i, t_j), \quad d^{(-1)} = q(x_i, t_{j-1}), \quad \beta_1 = \beta_1(t_j), \quad \beta_2 = \beta_2(t_j), \\ \bar{u}_1(x) &= u_1(x) + \frac{\tau}{2} \left( (k(x, 0)u'(x, 0))' - q(x, 0)u(x, 0) + f(x, 0) \right), \quad x \in \omega_h, \\ y^{(\sigma_1, \sigma_2)} &= \sigma \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \check{y}, \quad y^{(\sigma, \sigma)} = y + \sigma \tau^2 y_{\bar{t}\bar{t}}, \quad y_{\bar{t}} = \frac{y_t + y_{\bar{t}}}{2}, \\ y_t &= \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau}, \quad y_{\bar{t}} = \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau}, \quad \sum_{s=0}^j v_i^s \bar{\tau} = \sum_{s=1}^j v_i^s \tau + 0,5\tau v_i^0, \quad \bar{\tau} = \begin{cases} \frac{\tau}{2}, & s = 0, \\ \tau, & s \neq 0, \end{cases} \\ \bar{\beta}_1 &= \beta_1(t_j) + 0,5hq(0, t_j) = \beta_1^j + 0,5hd_0^j, \quad \bar{\beta}_2 = \beta_2(t_j) + 0,5hq(l, t_j) = \beta_2^j + 0,5hd_N^j, \\ \bar{\mu}_1 &= \mu_1(t_j) + 0,5h\varphi_0^j, \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2(t_j) + 0,5h\varphi_N^j. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что погрешность аппроксимации схемы (17)–(20) на решении  $u = u(x, t)$  дифференциальной задачи (1)–(4), при любых значениях постоянной  $\sigma$ , не зависящей от  $h$  и  $\tau$ , имеет порядок  $O(h^2 + \tau^2)$  [17], т.е.  $\varphi = O(h^2 + \tau^2)$ ,  $\bar{\mu}_1 = O(h^2 + \tau^2)$ ,  $\bar{\mu}_2 = O(h^2 + \tau^2)$ . Подробные выкладки в данной работе не приводятся.

Справедливы следующие две леммы.

**Лемма 1.** Для всякой функции  $y(x)$ , заданной на равномерной сетке  $\bar{\omega}_h$ , справедлива оценка

$$\frac{h^2}{4} \|y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \|y\|_0^2 + 0,5h(y_0^2 + y_N^2).$$

*Доказательство.* Рассуждения проведём по аналогии с [17]. Тогда справедлива следующая формула

$$(y_{\bar{x},i})^2 = \left( \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right)^2 \leq \frac{2}{h^2} (y_i^2 + y_{i-1}^2).$$

Умножим теперь обе части на  $h$  и просуммируем по  $i$  от 1 до  $N$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (y_{\bar{x},i})^2 h &\leq \frac{2}{h^2} \sum_{i=1}^N (y_i^2 + y_{i-1}^2) h = \frac{2}{h^2} \left[ \sum_{i=1}^N (y_i^2) h + \sum_{i=1}^N (y_{i-1}^2) h \right] = \\ &= \frac{2}{h^2} \left[ 2 \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h + (y_0^2 + y_N^2) h \right] = \\ &= \frac{4}{h^2} \left[ \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h + 0,5h(y_0^2 + y_N^2) \right] = \frac{4}{h^2} \|y\|_0^2 + 0,5h(y_0^2 + y_N^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \frac{4}{h^2} \|y\|_0^2 + 0,5h(y_0^2 + y_N^2),$$

или

$$\frac{h^2}{4} \|y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \|y\|_0^2 + 0,5h(y_0^2 + y_N^2).$$

□

**Лемма 2.** Для всякой функции  $y(x)$ , заданной на равномерной сетке  $\bar{\omega}_{h\tau}$ , справедлива оценка

$$yy_{\bar{t}} = \frac{1}{4} (y^2 + \check{y}^2)_t - \frac{\tau^2}{4} ((y_{\bar{t}})^2)_t.$$

*Доказательство.* Рассуждения проведём по аналогии с [17], тогда имеем

$$\begin{aligned} yy_{\bar{t}} &= y^j \frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} = \frac{y^{j+1}y^j - y^j y^{j-1}}{2\tau} = \frac{1}{2} (y^j y^{j-1})_t = \frac{1}{4} (2y^j y^{j-1})_t = \\ &= \frac{1}{4} ((y^j)^2 + (y^{j-1})^2 - (y^j)^2 + 2y^j y^{j-1} - (y^{j-1})^2)_t \\ &= \frac{1}{4} ((y^j)^2 + (y^{j-1})^2 - (y^j - y^{j-1})^2)_t = \frac{1}{4} (y^2 + \check{y}^2)_t - \frac{\tau^2}{4} (y_{\bar{t}}^2)_t. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$yy_{\bar{t}} = \frac{1}{4} (y^2 + \check{y}^2)_t - \frac{\tau^2}{4} (y_{\bar{t}}^2)_t.$$

□

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия ограниченности и гладкости (5), тогда существует такое  $\tau_0$ , что если  $\tau \leq \tau_0(c_0, c_1, c_2, l, T, \sigma)$ ,  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ , то для решения разностной задачи (17)-(20) справедлива априорная оценка

$$\begin{aligned} & \| [y^{j+1}] \|_1^2 \leq \\ & \leq M \left[ \sum_{j'=1}^j ( \| [\varphi] \|_0^2 + \mu_{1\bar{i}}^2 + \mu_{2\bar{i}}^2 ) \tau + \left( \mu_1^{(-1)} \right)^2 + \left( \mu_2^{(-1)} \right)^2 + \mu_1^{0^2} + \mu_2^{0^2} + \| [y^1] \|_1^2 \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где  $M = \text{const} > 0$ , не зависящая от  $h$  и  $\tau$ , скалярное произведение и нормы имеют вид:

$$[y, v] = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h + 0,5h(y_0 v_0 + y_N v_N) = \sum_{i=0}^N y_i v_i \bar{h}, \quad \bar{h} = \begin{cases} \frac{h}{2}, & i = 0, i = N, \\ h, & i = 1, N-1, \end{cases}$$

$$\| [y] \|_0^2 = [y, y], \quad \| [y] \|_0^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2 \bar{h} = (y, y), \quad \| [y] \|_0 = \sqrt{(y, y)},$$

$$\begin{aligned} \| [y] \|_1^2 &= \| [y_{\bar{i}}] \|_0^2 + \| [y_{\bar{x}}] \|_0^2 + \| [\dot{y}_{\bar{x}}] \|_0^2 + \| [y] \|_0^2 + \| [\dot{y}] \|_0^2 + \\ &+ \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 \| [y_{\bar{x}\bar{i}}] \|_0^2 + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 \left( (y_{\bar{i},0}^1)^2 + (y_{\bar{i},N}^1)^2 \right) + y_0^2 + \dot{y}_0^2 + y_N^2 + \dot{y}_N^2. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Исследование устойчивости будем проводить методом энергетических неравенств. Для этого перепишем схему (17)-(20) в операторном виде

$$y_{\bar{i}t} + \bar{B}y = \bar{\Lambda}y^{(\sigma,\sigma)} + \bar{\Phi}, \quad (22)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \bar{u}_1(x), \quad (23)$$

где

$$\bar{B}y = \begin{cases} By = \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} y_i^s \bar{\tau}, \\ B^- y_0 = \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} y_0^s \bar{\tau}, \\ B^+ y_N = \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} y_N^s \bar{\tau}, \end{cases} \quad \bar{\Lambda}y = \begin{cases} \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x - dy, \\ \frac{1}{0,5h} \Lambda^- y_0 = \frac{1}{0,5h} (a_1 y_{\bar{x},0} - \bar{\beta}_1 y_0), \\ \frac{1}{0,5h} \Lambda^+ y_N = \frac{1}{0,5h} (-a_N y_{\bar{x},N} - \bar{\beta}_2 y_N), \end{cases}$$

$$\bar{\Phi} = \begin{cases} \Phi = \varphi, \\ \frac{1}{0,5h} \Phi^- = \frac{1}{0,5h} \bar{\mu}_1, \\ \frac{1}{0,5h} \Phi^+ = \frac{1}{0,5h} \bar{\mu}_2. \end{cases}$$

Умножим теперь (22) скалярно на  $2\tau y_{\bar{i}} = \tau(\dot{y}_{\bar{i}} + y_{\bar{i}})$ :

$$[y_{\bar{i}t}, 2\tau y_{\bar{i}}] + [\bar{B}y, 2\tau y_{\bar{i}}] = [\bar{\Lambda}y^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\bar{i}}] + [\bar{\Phi}, 2\tau y_{\bar{i}}]. \quad (24)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в (24):

$$[y_{\bar{t}t}, 2\tau y_{\bar{t}}] = [\hat{y}_{\bar{t}} - y_{\bar{t}}, \hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}}] = [1, \hat{y}_{\bar{t}}^2 - y_{\bar{t}}^2] = [1\hat{y}_{\bar{t}}^2] - [1, y_{\bar{t}}^2] = \tau (|[y_{\bar{t}}]|_0^2)_t. \quad (25)$$

Оценим второе слагаемое в левой части (24), используя неравенство Коши с  $\varepsilon$  и неравенство Коши-Буняковского, тогда имеем

$$\begin{aligned} -[\bar{B}y, 2\tau y_{\bar{t}}] &= -(By, 2\tau y_{\bar{t}}) - 0, 5h (2\tau y_{\bar{t},N} B^+ y_N + 2\tau y_{\bar{t},0} B^- y_0) = \\ &= -\left(\sum_{s=0}^j \bar{\rho}_i^{j,s} y_i^s \bar{\tau}, 2\tau y_{\bar{t}}\right) - 0, 5h \left(2\tau y_{\bar{t},N} \sum_{s=0}^j \bar{\rho}_N^{j,s} y_N^s \bar{\tau} + 2\tau y_{\bar{t},0} \sum_{s=0}^j \bar{\rho}_0^{j,s} y_0^s \bar{\tau}\right) = \\ &= -\left[\sum_{s=0}^j \bar{\rho}_i^{j,s} y_i^s \bar{\tau}, 2\tau y_{\bar{t}}\right] \leq \left[\frac{\tau}{4}, \left(\sum_{s=0}^j \bar{\rho}_i^{j,s} y_i^s \bar{\tau}\right)^2 + 2(\hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}})^2\right] \leq \\ &= \frac{\tau M_1}{4} \sum_{s=0}^j |[y^s]|_0^2 \bar{\tau} + \tau (|\hat{y}_{\bar{t}}|_0^2 + |[y_{\bar{t}}]|_0^2). \end{aligned} \quad (26)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (24), тогда получим

$$\begin{aligned} [\Lambda y^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\bar{t}}] &= (\Lambda y^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\bar{t}}) + 0, 5h 2\tau y_{\bar{t},0} \frac{1}{0, 5h} \Lambda^- y_0 + 0, 5h 2\tau y_{\bar{t},N} \frac{1}{0, 5h} \Lambda^+ y_N = \\ &= \left(\left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma,\sigma)}\right)_x, 2\tau y_{\bar{t}}\right) - \left(dy^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\bar{t}}\right) + 2\tau y_{\bar{t},0} a_1 y_{x,0}^{(\sigma,\sigma)} - 2\tau y_{\bar{t},0} \bar{\beta}_1 y_0^{(\sigma,\sigma)} - \\ &- 2\tau y_{\bar{t},N} a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma,\sigma)} - 2\tau y_{\bar{t},N} \bar{\beta}_2 y_N^{(\sigma,\sigma)} = -\left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\bar{x}\bar{t}}\right) + 2\tau y_{\bar{t},N} a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma,\sigma)} - 2\tau y_{\bar{t},0} a_1 y_{x,0}^{(\sigma,\sigma)} - \\ &- \left(dy^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\bar{t}}\right) + 2\tau y_{\bar{t},0} a_1 y_{x,0}^{(\sigma,\sigma)} - 2\tau y_{\bar{t},0} \beta_1 y_0^{(\sigma,\sigma)} - 2\tau y_{\bar{t},0} 0, 5h d_0^j y_0^{(\sigma,\sigma)} - 2\tau y_{\bar{t},N} a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma,\sigma)} - \\ &- 2\tau y_{\bar{t},N} \beta_2 y_N^{(\sigma,\sigma)} - 2\tau y_{\bar{t},N} 0, 5h d_N^j y_N^{(\sigma,\sigma)} = -\left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\bar{x}\bar{t}}\right) - \left(dy^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\bar{t}}\right) - \\ &- 2\tau y_{\bar{t},0} \beta_1 y_0^{(\sigma,\sigma)} - 2\tau y_{\bar{t},N} \beta_2 y_N^{(\sigma,\sigma)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Пользуясь леммами 1 и 2 и учитывая, что  $y^{(\sigma,\sigma)} = y + \sigma\tau^2 y_{\bar{t}t}$ , преобразуем некоторые слагаемые, входящие в правую часть (27):

$$\begin{aligned} -\left(ay_{\bar{x}}^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\bar{x}\bar{t}}\right) &= -\left(ay_{\bar{x}}, 2\tau y_{\bar{x}\bar{t}}\right) - \left(\sigma\tau^2 ay_{\bar{t}\bar{t}\bar{x}}, 2\tau y_{\bar{x}\bar{t}}\right) - \left(\frac{a\tau}{2}, (y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2)_t - \tau^2 (y_{\bar{x}\bar{t}}^2)_t\right) - \\ &- \left(\sigma\tau^2 a, (\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}} - y_{\bar{x}\bar{t}})(\hat{y}_{\bar{x}\bar{t}} + y_{\bar{x}\bar{t}})\right) = -\left(\frac{\tau}{2} a, (y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_x^2 - \tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2)_t\right) - \left(\sigma\tau^3 a, (y_{\bar{x}\bar{t}}^2)_t\right) = \\ &= -\frac{\tau}{2} \left(a^{(-1)}, y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2 - \tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right)_t + \frac{\tau}{2} \left(a_{\bar{t}}, y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2 - \tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right) - \\ &- \sigma\tau^3 \left(a^{(-1)}, y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right)_t + \sigma\tau^3 \left(a_{\bar{t}}, y_{\bar{x}\bar{t}}^2\right). \end{aligned} \quad (28)$$

С помощью неравенства Коши с  $\varepsilon$  оценим второе и третье слагаемые в правой части (24), тогда имеем

$$- \left[dy^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\bar{t}}\right] = - \left[dy, 2\tau y_{\bar{t}}\right] - \sigma\tau^2 \left[dy_{\bar{t}t}, 2\tau y_{\bar{t}}\right] = \left[\frac{\tau}{2} d, (y^2 + \check{y}^2)_t - \tau^2 (y_{\bar{x}\bar{t}}^2)_t\right] -$$

$$\begin{aligned}
& - [\sigma\tau^2 d, \hat{y}_{\bar{t}}^2 - y_{\bar{t}}^2] = - \left[ \frac{\tau}{2} d, (y^2 + \check{y}^2 - \tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2)_t \right] - [\sigma\tau^3 d, (y_{\bar{t}}^2)_t] = \\
& = - \frac{\tau}{2} \left[ d^{(-1)}, y^2 + \check{y}^2 - \tau^2 y_{\bar{t}}^2 \right]_t + \frac{\tau}{2} [d_{\bar{t}}, y^2 + \check{y}^2 - \tau^2 y_{\bar{t}}^2] - \\
& \quad - \sigma\tau^3 [d^{(-1)}, y_{\bar{t}}^2]_t + \sigma\tau^3 [d_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}^2], \tag{29} \\
& - 2\tau\beta_1 y_0^{(\sigma,\sigma)} y_{\bar{t},0} - 2\tau\beta_2 y_N^{(\sigma,\sigma)} y_{\bar{t},N} = - 2\tau\beta_1 y_0 y_{\bar{t},0} - 2\tau^3 \sigma\beta_1 y_{\bar{t},0} y_{\bar{t},0} - \\
& \quad - 2\tau\beta_2 y_N y_{\bar{t},N} - 2\tau^3 \sigma\beta_2 y_{\bar{t},N} y_{\bar{t},N} = \\
& = - 2\tau\beta_1 \left( \frac{1}{4} (y_0^2 + \check{y}_0^2)_t - \frac{\tau^2}{4} (y_{\bar{t},0}^2)_t \right) - 2\tau\beta_2 \left( \frac{1}{4} (y_N^2 + \check{y}_N^2)_t - \frac{\tau^2}{4} (y_{\bar{t},N}^2)_t \right) - \\
& \quad - \sigma\tau^2 \beta_1 (\hat{y}_{\bar{t},0} - y_{\bar{t},0}) (\hat{y}_{\bar{t},0} + y_{\bar{t},0}) - \sigma\tau^2 \beta_2 (\hat{y}_{\bar{t},N} - y_{\bar{t},N}) (\hat{y}_{\bar{t},N} + y_{\bar{t},N}) = \\
& = - \frac{\tau}{2} \beta_1 (y_0^2 + \check{y}_0^2 - \tau^2 y_{\bar{t},0}^2)_t - \frac{\tau}{2} \beta_2 (y_N^2 + \check{y}_N^2 - \tau^2 y_{\bar{t},N}^2)_t - \sigma\tau^3 \beta_1 (y_{\bar{t},0}^2)_t - \\
& \quad - \sigma\tau^3 \beta_2 (y_{\bar{t}}^2)_t = - \frac{\tau}{2} \left( \beta_1^{(-1)} (y_0^2 + \check{y}_0^2 - \tau^2 y_{\bar{t},0}^2) \right)_t + \frac{\tau}{2} \beta_{1\bar{t}} (y_0^2 + \check{y}_0^2 - \tau^2 y_{\bar{t},0}^2) - \\
& \quad - \frac{\tau}{2} \left( \beta_2^{(-1)} (y_N^2 + \check{y}_N^2 - \tau^2 y_{\bar{t},N}^2) \right)_t + \frac{\tau}{2} \beta_{2\bar{t}} (y_N^2 + \check{y}_N^2 - \tau^2 y_{\bar{t},N}^2) - \\
& \quad - \sigma\tau^3 \left( \beta_1^{(-1)} y_{\bar{t},0}^2 \right)_t + \sigma\tau^3 \beta_{1\bar{t}} y_{\bar{t},0}^2 - \sigma\tau^3 \left( \beta_2^{(-1)} y_{\bar{t},N}^2 \right)_t + \sigma\tau^3 \beta_{2\bar{t}} y_{\bar{t},N}^2. \tag{30}
\end{aligned}$$

Принимая во внимание преобразования (28)-(30), из (27) получаем

$$\begin{aligned}
[\bar{\Lambda} y^{(\sigma,\sigma)}, 2\tau y_{\bar{t}}] & = - \frac{\tau}{2} \left( a^{(-1)}, y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2 - \tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2 \right)_t + \frac{\tau}{2} (a_{\bar{t}}, y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2 - \tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2) - \\
& \quad - \sigma\tau^3 \left( a^{(-1)}, y_{\bar{x}\bar{t}}^2 \right)_t + \sigma\tau^3 (a_{\bar{t}}, y_{\bar{x}\bar{t}}^2) - \frac{\tau}{2} \left[ d^{(-1)}, y^2 + \check{y}^2 - \tau^2 y_{\bar{t}}^2 \right]_t + \\
& \quad + \frac{\tau}{2} [d_{\bar{t}}, y^2 + \check{y}^2 - \tau^2 y_{\bar{t}}^2]_t - \sigma\tau^3 [d^{(-1)}, y_{\bar{t}}^2]_t + \sigma\tau^3 [d_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}^2] - \\
& \quad - \frac{\tau}{2} \left( \beta_1^{(-1)} (y_0^2 + \check{y}_0^2 - \tau^2 y_{\bar{t},0}^2) \right)_t + \frac{\tau}{2} \beta_{1\bar{t}} (y_0^2 + \check{y}_0^2 - \tau^2 y_{\bar{t},0}^2) - \\
& \quad - \frac{\tau}{2} \left( \beta_2^{(-1)} (y_N^2 + \check{y}_N^2 - \tau^2 y_{\bar{t},N}^2) \right)_t + \frac{\tau}{2} \beta_{2\bar{t}} (y_N^2 + \check{y}_N^2 - \tau^2 y_{\bar{t},N}^2) - \\
& \quad - \sigma\tau^3 \left( \beta_1^{(-1)} y_{\bar{t},0}^2 \right)_t + \sigma\tau^3 \beta_{1\bar{t}} y_{\bar{t},0}^2 - \sigma\tau^3 \left( \beta_2^{(-1)} y_{\bar{t},N}^2 \right)_t + \sigma\tau^3 \beta_{2\bar{t}} y_{\bar{t},N}^2, \tag{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\bar{\Phi}, 2\tau y_{\bar{t}}] & = (\Phi, 2\tau y_{\bar{t}}) + 0, 5h 2\tau y_{\bar{t},0} \frac{1}{0, 5h} \Phi^- + 0, 5h 2\tau y_{\bar{t},N} \frac{1}{0, 5h} \Phi^+ = \\
& = (\varphi, 2\tau y_{\bar{t}}) + 2\tau \bar{\mu}_1 y_{\bar{t},0} + 2\tau \bar{\mu}_2 y_{\bar{t},N} = (\varphi, 2\tau y_{\bar{t}}) + 0, 5h \varphi_0^j 2\tau y_{\bar{t},0} + \\
& \quad + 0, 5h \varphi_N^j 2\tau y_{\bar{t},0} + 2\tau \mu_1 y_{\bar{t},0} + 2\tau \mu_2 y_{\bar{t},N} = [\varphi, 2\tau y_{\bar{t}}] + 2\tau \mu_1 y_{\bar{t},0} + \\
& \quad + 2\tau \mu_2 y_{\bar{t},N} = \tau [\varphi, \hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}}] + \tau \mu_1 (\hat{y}_{\bar{t},0} + y_{\bar{t},0}) + \tau \mu_2 (\hat{y}_{\bar{t},N} + y_{\bar{t},N}). \tag{32}
\end{aligned}$$

Преобразуем некоторые слагаемые, входящие в правую часть (32):

$$\tau [\varphi, \hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}}] \leq \tau \left[ 1, \varphi^2 + \left( \frac{\hat{y}_{\bar{t}} + y_{\bar{t}}}{2} \right)^2 \right] \leq (\tau, \varphi^2) + \left( \frac{\tau}{2}, \hat{y}_{\bar{t}}^2 + y_{\bar{t}}^2 \right) =$$

$$= \tau |\varphi|_0^2 + \frac{\tau}{2} \left( \|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2 \right), \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \tau \mu_1 (\hat{y}_{\bar{t},0} + y_{\bar{t},0}) + \tau \mu_2 (\hat{y}_{\bar{t},N} + y_{\bar{t},N}) &= \tau \mu_1 y_{t,0} + \tau \mu_1 \check{y}_{t,0} + \tau \mu_2 y_{t,N} + \tau \mu_2 \check{y}_{t,N} = \\ &= \tau \left( \mu_1^{(-1)} y_0 \right)_t - \tau \mu_{1\bar{t}} y_0 + \tau \left( \mu_1^{(-1)} \check{y}_0 \right)_t - \tau \mu_{1\bar{t}} \check{y}_0 + \\ &+ \tau \left( \mu_2^{(-1)} y_N \right)_t - \tau \mu_{2\bar{t}} y_N + \tau \left( \mu_2^{(-1)} \check{y}_N \right)_t - \tau \mu_{2\bar{t}} \check{y}_N \leq \tau (\mu_{1\bar{t}}^2 + \mu_{2\bar{t}}^2) + \\ &+ \tau \left( \mu_1^{(-1)} (y_0 + \check{y}_0) + \mu_2^{(-1)} (y_N + \check{y}_N) \right)_t + \frac{\tau}{2} (y_0^2 + \check{y}_0^2 + y_N^2 + \check{y}_N^2). \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая (33), (34), из (32) находим неравенство

$$\begin{aligned} [\bar{\Phi}, 2\tau y_{\bar{t}}] &\leq |\varphi|_0^2 \tau + \frac{\tau}{2} \left( \|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2 \right) + \\ &+ \tau \left( \mu_1^{(-1)} (y_0 + \check{y}_0) + \mu_2^{(-1)} (y_N + \check{y}_N) \right)_t + \\ &+ \tau (\mu_{1\bar{t}}^2 + \mu_{2\bar{t}}^2) + \frac{\tau}{2} (y_0^2 + \check{y}_0^2 + y_N^2 + \check{y}_N^2). \end{aligned} \quad (35)$$

Принимая во внимание оценки (25)-(35), из (24) находим

$$\begin{aligned} &\tau (\|y_{\bar{t}}\|_0^2)_t + \frac{\tau}{2} (a^{(-1)}, y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2 - \tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2)_t + \frac{\tau}{2} [d^{(-1)}, y^2 + \check{y}^2 - \tau^2 y_{\bar{t}}^2]_t + \\ &+ \frac{\tau}{2} (\beta_1^{(-1)} (y_0^2 + \check{y}_0^2 - \tau^2 y_{\bar{t},0}^2))_t + \frac{\tau}{2} (\beta_2^{(-1)} (y_N^2 + \check{y}_N^2 - \tau^2 y_{\bar{t},N}^2))_t + \sigma \tau^3 (a^{(-1)}, y_{\bar{x}\bar{t}}^2)_t + \\ &+ \sigma \tau^3 [d^{(-1)}, y_{\bar{t}}^2]_t + \sigma \tau^3 (\beta_1^{(-1)} y_{\bar{t},0}^2)_t + \sigma \tau^3 (\beta_2^{(-1)} y_{\bar{t},N}^2)_t \leq \\ &\leq \tau (\|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{t}}\|_0^2) + \frac{\tau M_1}{4} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + |\varphi|_0^2 \tau + \tau \left( \mu_1^{(-1)} (y_0 + \check{y}_0) + \mu_2^{(-1)} (y_N + \check{y}_N) \right)_t + \\ &+ \tau (\mu_{1\bar{t}}^2 + \mu_{2\bar{t}}^2) + \frac{\tau}{2} (y_0^2 + \check{y}_0^2 + y_N^2 + \check{y}_N^2) + \frac{\tau}{2} (a_{\bar{t}}, y_{\bar{x}}^2 + \check{y}_{\bar{x}}^2 - \tau^2 y_{\bar{x}\bar{t}}^2) + \\ &+ \frac{\tau}{2} [d_{\bar{t}}, y^2 + \check{y}^2 - \tau^2 y_{\bar{t}}^2] + \frac{\tau}{2} \beta_{1\bar{t}} (y_0^2 + \check{y}_0^2 - \tau^2 y_{\bar{t},0}^2) + \frac{\tau}{2} \beta_{2\bar{t}} (y_N^2 + \check{y}_N^2 - \tau^2 y_{\bar{t},N}^2) + \\ &+ \sigma \tau^3 (a_{\bar{t}}, y_{\bar{x}\bar{t}}^2) + \sigma \tau^3 [d_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}^2] + \sigma \tau^3 \beta_{1\bar{t}} y_{\bar{t},0}^2 + \sigma \tau^3 \beta_{2\bar{t}} y_{\bar{t},N}^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Просуммируем (36) по  $j'$  от 1 до  $j$ , тогда получим

$$\begin{aligned} &\left( 1 + c_0 \tau^2 \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \right) \|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \frac{c_0}{2} (\|y_{\bar{x}}\|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}\|_0^2 + \|y\|_0^2 + \|\check{y}\|_0^2) + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 c_0 \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2 + \\ &+ \frac{c_0}{2} (y_0^2 + \check{y}_0^2 + y_N^2 + \check{y}_N^2) + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 c_0 (y_{\bar{t},0}^2 + y_{\bar{t},N}^2) \leq \mu_1^{(-1)} (y_0 + \check{y}_0) + \mu_2^{(-1)} (y_N + \check{y}_N) + \\ &+ \sum_{j'=1}^j \left[ \|\hat{y}_{\bar{t}}\|_0^2 + \left( 1 + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 c_2 \right) \|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \frac{c_2}{2} (\|y_{\bar{x}}\|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}\|_0^2 + \|y\|_0^2 + \|\check{y}\|_0^2) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 c_2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2 + \frac{M_1}{4} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} |[y^s]| \bar{\tau} + |[\varphi]|_0^2 + \mu_{1\bar{t}}^2 + \mu_{2\bar{t}}^2 + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 c_2 (y_{\bar{t},0}^2 + y_{\bar{t},N}^2) + \\
& \quad + \frac{c_0 + 1}{2} (y_0^2 + \check{y}_0^2 + y_N^2 + \check{y}_N^2) \Big] \tau + M_2 \left[ \|y_{\bar{t}}^1\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^1 + y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \|y^1 + y^0\|_0^2 + \right. \\
& + \left. \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}^1\|_0^2 + (y_0^1)^2 + (y_0^0)^2 + (y_N^1)^2 + (y_N^0)^2 + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 \left( (y_{\bar{t},0}^1)^2 + (y_{\bar{t},N}^1)^2 \right) - \right. \\
& \quad \left. - \mu_1^{(-1)} (y_0^1 + y_0^0) - \mu_2^{(-1)} (y_N^1 + y_N^0) \right]. \tag{37}
\end{aligned}$$

Оценим некоторые слагаемые в правой части (37), тогда имеем:

$$\begin{aligned}
& \mu_1^{(-1)} (y_0 + \check{y}_0) + \mu_2^{(-1)} (y_N + \check{y}_N) \leq \\
& \leq \frac{1}{4\varepsilon} \left[ \left( \mu_1^{(-1)} \right)^2 + \left( \mu_2^{(-1)} \right)^2 \right] + \varepsilon \left[ (y_0 + \check{y}_0)^2 + (y_N + \check{y}_N)^2 \right] = \\
& = \frac{2}{c_0} \left[ \left( \mu_1^{(-1)} \right)^2 + \left( \mu_2^{(-1)} \right)^2 \right] + \frac{c_0}{4} (y_0^2 + \check{y}_0^2 + y_N^2 + \check{y}_N^2), \tag{38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu_1^{(-1)}(t_1) (y_0^1 + \check{y}_0^0) - \mu_2^{(-1)}(t_1) (y_N^1 + y_N^0) \leq \frac{1}{2} (\mu_1^0)^2 + \frac{1}{2} (\mu_2^0)^2 + \\
& \quad + (y_0^1)^2 + (y_0^0)^2 + (y_N^1)^2 + (y_N^0)^2, \tag{39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j'=1}^j \tau \sum_{s=0}^{j'} |[y^s]|_0^2 \bar{\tau} = \sum_{j'=1}^j \tau \left( \sum_{s=1}^j |[y^s]|_0^2 \tau + \frac{\tau}{2} |[y^0]|_0^2 \right) \leq \\
& \leq T \sum_{j'=1}^j |[y^{j'}]|_0^2 \tau + \frac{T\tau}{2} |[y^0]|_0^2. \tag{40}
\end{aligned}$$

Учитывая оценки (38)-(40), из (37) при  $\sigma \geq \frac{1}{2}$  получаем

$$\begin{aligned}
& \|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}\|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}\|_0^2 + \|y\|_0^2 + \|\check{y}\|_0^2 + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2 + y_0^2 + \check{y}_0^2 + y_N^2 + \check{y}_N^2 + \\
& + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 (y_{\bar{t},0}^2 + y_{\bar{t},N}^2) \leq M_3 \sum_{j'=1}^j \left[ \|y_{\bar{t}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}\|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}\|_0^2 + \|y\|_0^2 + \|\check{y}\|_0^2 + \right. \\
& \quad \left. + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2 + \|y\|_0^2 + (y_0^2 + \check{y}_0^2 + y_N^2 + \check{y}_N^2) + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 (y_{\bar{t},0}^2 + y_{\bar{t},N}^2) \right] \tau + \\
& \quad M_4 \left[ \sum_{j'=1}^j (|[\varphi]|_0^2 + \mu_{1\bar{t}}^2 + \mu_{2\bar{t}}^2) \tau + \left( \mu_1^{(-1)} \right)^2 + \left( \mu_2^{(-1)} \right)^2 + \mu_1^0 + \mu_2^0 + \|y_{\bar{t}}^1\|_0^2 + \right. \\
& \quad \left. + \|y_{\bar{x}}^1\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \|y^1\|_0^2 + \|y^0\|_0^2 + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}^1\|_0^2 + (y_0^1)^2 + (y_N^0)^2 + (y_N^1)^2 + (y_N^0)^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 \left( (y_{\bar{t},0}^1)^2 + (y_{\bar{t},N}^1)^2 \right) \Big]. \quad (41)$$

Преобразуем  $\sum_{j=1}^j (|\hat{y}_{\bar{t}}|^2 + |y_{\bar{t}}|^2) \tau$ , тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^j (|\hat{y}_{\bar{t}}|^2 + |y_{\bar{t}}|^2) \tau &= \sum_{j'=1}^j |[y_{\bar{t}}^{j'+1}]|_0^2 \tau + \sum_{j'=1}^j |[y_{\bar{t}}^{j'}]|_0^2 \tau = \sum_{j'=2}^{j+1} |[y_{\bar{t}}^{j'}]|_0^2 \tau + \sum_{j'=1}^j |[y_{\bar{t}}^{j'}]|_0^2 \tau = \\ &= \tau |[y_{\bar{t}}^{j+1}]|_0^2 + \tau |[y_{\bar{t}}^1]|_0^2 + 2 \sum_{j'=2}^j |[y_{\bar{t}}^{j'}]|_0^2 \tau \leq \tau |[y_{\bar{t}}^{j+1}]|_0^2 + \tau |[y_{\bar{t}}^1]|_0^2 + 2 \sum_{j'=1}^j |[y_{\bar{t}}^{j'}]|_0^2 \tau. \end{aligned} \quad (42)$$

Перепишем (41) с учётом (42)

$$\begin{aligned} &(1 - 2\tau M_3) |[y_{\bar{t}}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}\|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}\|_0^2 + \|y\|_0^2 + \|\check{y}\|_0^2 + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2 + \\ &+ \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 (y_{\bar{t},0}^2 + y_{\bar{t},N}^2) + y_0^2 + \check{y}_0^2 + y_N^2 + \check{y}_N^2 \leq \\ &\leq M_5 \sum_{j'=1}^j \left[ |[y_{\bar{t}}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}\|_0^2 + \|\check{y}_{\bar{x}}\|_0^2 + \|y\|_0^2 + \|\check{y}\|_0^2 + \right. \\ &+ \left. \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_0^2 + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 (y_{\bar{t},0}^2 + y_{\bar{t},N}^2) + y_0^2 + \check{y}_0^2 + y_N^2 + \check{y}_N^2 \right] \tau + \\ &+ M_6 \left[ \sum_{j'=1}^j (|\varphi|_0^2 + \mu_{1\bar{t}}^2 + \mu_{2\bar{t}}^2) \tau + \left( \mu_1^{(-1)} \right)^2 + \left( \mu_2^{(-1)} \right)^2 + \mu_1^{0^2} + \mu_2^{0^2} + \right. \\ &+ |[y_{\bar{t}}^1]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^1\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \|y^1\|_0^2 + \|y^0\|_0^2 + \left. \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}^1\|_0^2 + \right. \\ &+ \left. \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 \left( (y_{\bar{t},0}^1)^2 + (y_{\bar{t},N}^1)^2 \right) + (y_0^1)^2 + (y_0^0)^2 + (y_N^1)^2 + (y_N^0)^2 \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Выбирая  $\tau \leq \tau_0 = \frac{1}{4M_3}$ , из (43) находим

$$\begin{aligned} |[y^{j+1}]|_1^2 &\leq M_7 \sum_{j'=1}^j |[y^{j'}]|_1^2 \tau + \\ &+ M_8 \left[ \sum_{j'=1}^j (|\varphi|_0^2 + \mu_{1\bar{t}}^2 + \mu_{2\bar{t}}^2) \tau + \left( \mu_1^{(-1)} \right)^2 + \left( \mu_2^{(-1)} \right)^2 + \mu_1^{0^2} + \mu_2^{0^2} + \|y^1\|_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Применяя к неравенству (44) разностный аналог леммы Гронуолла (лемма 4 [18] стр 171), из (44) получим оценку (21).  $\square$

Из оценки (21) следует устойчивость и сходимость схемы (17)-(20) со скоростью  $O(h^2 + \tau^2)$  при  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ ,  $\tau \leq \tau_0(c_0, c_1, c_2, l, T, \sigma)$  в норме  $\|y\|_1^2$ .

#### 4. Тестовая задача и численные результаты

Рассмотрим следующий тестовый пример

$$u_{tt} + \int_0^t \frac{x e^\xi}{1 + t^2} u(x, \xi) d\xi = (e^{x+t} u_x)_x - \cos(x+t) u(x, t) + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1,$$

$$e^t u_x(0, t) = \cos(t) u(0, t) - \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$-e^{l+t} u_x(l, t) = \sin(t) u(l, t) - \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = \sin(x), \quad u_t(x, 0) = \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

где  $f(x, t) = e^t \sin(x) + e^{x+2t}(\sin(x) - \cos(x)) + e^t \sin(x) \cos(x+t) + x \sin(x) \frac{e^{2t}-1}{2(t^2+1)}$ ,

$\mu_1 = -e^{2t}$ ,  $\mu_2 = e^{l+2t} \cos(l) + e^t \sin(l) \sin(t)$ ,  $l = 1, T = 1$ .

Точным решением задачи является функция

$$u(x, t) = e^t \sin(x).$$

Ниже в Таблице 1 при уменьшении шагов сетки приведены максимальные значения погрешности ( $z = |y - u|$ ) и вычислительный (апостериорный) порядок сходимости (ПС) в нормах  $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$  и  $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ , где  $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max_{(x_i, t_j) \in \bar{w}_{h\tau}} |y|$ , когда  $h = \tau$ .

Вычислительный (апостериорный) порядок сходимости будем определять по принципу Рунге

$$\text{ПС} = \log_2 \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|},$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — погрешности, соответствующие шагам  $0.5h$ ,  $h$ .

**ТАБЛИЦА 1:** Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах  $\|\cdot\|_0$  и  $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$  при уменьшении размера сетки на  $t = 1$ , когда  $h = \tau$

$h$	$\max_{0 < j < m} \ z^j\ _0$	ПС в $\ \cdot\ _0$	$\ z\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\ \cdot\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$
1/10	2.48674e-3		5.58062e-3	
1/20	5.82315e-4	2.094382	1.33258e-3	2.066204
1/40	1.43193e-4	2.023841	3.35074e-4	1.991671
1/80	3.55916e-5	2.008352	8.33586e-5	2.007076
1/160	8.87841e-6	2.003164	2.08165e-5	2.001600
1/320	2.21755e-6	2.001335	5.20189e-6	2.000624

Анализ данных, представленных в Таблице 1, показывает, что погрешность предлагаемого численного метода решения тестового примера последовательно уменьшается в соответствии с теоретическим порядком аппроксимации  $O(h^2 + \tau^2)$ . Здесь  $h$  обозначает дискретный шаг по пространственной координате, а  $\tau$  — шаг по времени.

Поведение погрешности, наблюдаемое при последовательном измельчении сетки, свидетельствует о корректной реализации разностной схемы второго порядка точности и асимптотической сходимости метода к точному решению исходной дифференциальной задачи. В итоге, предлагаемый метод демонстрирует высокую эффективность, балансируя точность и вычислительные затраты, что делает его перспективным для реальных приложений.

## Заключение

Настоящая работа посвящена изучению третьей начально-краевой задачи уравнения колебания струны. На равномерной сетке построена разностная схема с порядком точности  $O(h^2 + \tau^2)$ . При предположении существования регулярного решения методом энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной формах. Эти оценки обеспечивают единственность решения и непрерывную зависимость его от входных данных задачи. В предположении существования точного решения в классе достаточно гладких функций, а также в силу линейности исходной задачи априорная оценка в разностной форме позволяют утверждать сходимость приближенного решения к точному решению со скоростью  $O(h^2 + \tau^2)$ . Проведены численные расчёты тестового примера, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

## Список литературы

- [1] Rao S.S. Mechanical vibration. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall, 2004.
- [2] Tedesco J.W., McDougal W.G., Ross C.A. Structural Dynamics: Theory and Applications. Addison Wesley Longman, 1999. 816 p.
- [3] Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Курс общей физики. Механика. М.: Физматлит, 2011. 472 с.
- [4] Паршаков А.Н. Физика в ключевых задачах. Механика. Колебания. Акустика. Долгопрудный: Интеллект, 2013. 480 с.
- [5] Аникеев А.А., Молчанов А.М., Янышев Д.С. Основы вычислительного теплообмена и гидродинамики. М.: Книжный дом Либроком, 2010. 164 с.
- [6] Christov C.I., Guran A. Selected Topics in Nonlinear Wave Mechanics. Boston: Birkhäuser, 2002. 263 p.
- [7] Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Издательство УРСС, 2017. 312 с.

- [8] Biot M.A. Mechanics of incremental deformations. New York: John Wiley, 1965. 517 p.
- [9] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Учебное пособие. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 560 с.
- [10] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47(89), № 3. С. 271–306.
- [11] Пешков И.М. Численное моделирование разрывных решений в нелинейной теории упругости // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 5. С. 152–161.
- [12] Бештоков М.Х. Метод Римана для решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. 2013. № 4 (33). С. 1–10.
- [13] Бештоков М.Х. Численное исследование начально-краевых задач для уравнения соболевского типа с дробной по времени производной // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 2. С. 185–202.
- [14] Бештоков М.Х., Бештокова З.В. Устойчивость и сходимость разностных схем, аппроксимирующих первую краевую задачу для интегродифференциальных параболических уравнений в многомерной области // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 3. С. 77–91. <https://doi.org/10.26456/vtpmk661>
- [15] Бештоков М.Х. Локально-одномерная схема для третьей начально-краевой задачи для многомерного уравнения соболевского типа с эффектом памяти // Владикавказский математический журнал. 2024. Т. 26, № 1. С. 36–55.
- [16] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
- [17] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
- [18] Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 с.

#### Образец цитирования

Бештоков М.Х. Численное решение третьей краевой задачи для уравнения колебания струны с эффектом памяти // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 2. С. 37–55. <https://doi.org/10.26456/vtpmk741>

#### Сведения об авторах

##### 1. Бештоков Мурат Хамидбиевич

ведущий научный сотрудник отдела Вычислительных методов Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

*Россия, 360000, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А. E-mail: [beshtokov-murat@yandex.ru](mailto:beshtokov-murat@yandex.ru)*

# NUMERICAL SOLUTION OF THE THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF VIBRATION OF A STRING WITH A MEMORY EFFECT

**Beshtokov M.K.**

Institute of applied mathematics and automation of Kabardino-Balkar scientific center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik

---

*Received 12.04.2025, revised 25.11.2025.*

---

The third initial-boundary value problem for the equation of oscillation of a string with a memory effect is investigated. Using the method of energy inequalities for solving the initial differential problem, an a priori estimate in differential form is obtained. A difference scheme of the second order of approximation by the grid parameters is constructed and an a priori estimate in difference form is obtained. The obtained a priori estimates imply the uniqueness and stability of the solution with respect to the right-hand side and initial data, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the initial differential problem with a rate equal to the order of approximation of the difference scheme.

**Keywords:** third boundary value problem, string vibration equation, memory effect, prehistory, difference scheme, a priori estimate, stability and convergence of difference schemes.

## Citation

Beshtokov M.K., “Numerical solution of the third boundary value problem for the equation of vibration of a string with a memory effect”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2026, № 2, 37–55 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk741>

## References

- [1] Rao S.S., *Mechanical vibration*, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2004.
- [2] Tedesco J.W., McDougal W.G., Ross C.A., *Structural Dynamics: Theory and Applications*, Addison Wesley Longman, 1999, 816 pp.
- [3] Aleshkevich V.A., Dedenko L.G., Karavaev V.A., *Kurs obshhej fiziki. Mekhanika [Course of General Physics. Mechanics]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2011 (in Russian), 472 pp.
- [4] Parshakov A.N., *Fizika v klyuchevykh zadachakh. Mekhanika. Kolebaniya. Akustika [Physics in Key Problems. Mechanics. Oscillations. Acoustics]*, Intellect, Dolgoprudnyj, 2013 (in Russian), 480 pp.

- [5] Anikeev A.A., Molchanov A.M., Yanyshv D.S., *Osnovy vychislitel'nogo teploobmena i gidrodinamiki*, Librocom Book House, Moscow, 2010 (in Russian), 164 pp.
- [6] Christov C.I., Guran A., *Selected Topics in Nonlinear Wave Mechanics*, Birkhäuser, Boston, 2002, 263 pp.
- [7] Ryskin N.M., Trubetskov D.I., *Nelinejnye volny [Nonlinear Waves]*, URSS Publ., Moscow, 2017 (in Russian), 312 pp.
- [8] Biot M.A., *Mechanics of incremental deformations*, John Wiley, New York, 1965, 517 pp.
- [9] Rabinovich M.I., Trubetskov D.I., *Vvedenie v teoriyu kolebanij i voln [Introduction to the Theory of Oscillations and Waves]*, Textbook, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, 2000 (in Russian), 560 pp.
- [10] Godunov S.K., “Difference Method for Numerical Calculation of Discontinuous Solutions of Hydrodynamic Equations”, *Matematicheskij sbornik [Mathematical collection]*, **47(89):3** (1959), 271–306 (in Russian).
- [11] Peshkov I.M., “Numerical Modeling of Discontinuous Solutions in Nonlinear Elasticity Theory”, *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*, **50:5** (2009), 152–161 (in Russian).
- [12] Beshtokov M.Kh., “Riemann Method for Solving Nonlocal Boundary Value Problems for Third-Order Pseudoparabolic Equations”, *Vestnik SamGTU. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences]*, 2013, № 4 (33), 1–10 (in Russian).
- [13] Beshtokov M.Kh., “Numerical Study of Initial-Boundary Value Problems for a Sobolev-Type Equation with a Fractional Time Derivative”, *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki [Journal of computational mathematics and mathematical physics]*, **59:2** (2019), 185–202 (in Russian).
- [14] Stability and Convergence of Difference Schemes Approximating the First Boundary Value Problem for Integro-Differential Parabolic Equations in a Multidimensional Domain, “Ustojchivost i skhodimost raznostnykh skhem, approksimiruyushhikh pervuyu kraevuyu zadachu dlya integro-differentsialnykh parabolicheskikh uravnenij v mnogomernoj oblasti”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 3, 77–91 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtpmk661>.
- [15] Beshtokov M.Kh., “Locally One-Dimensional Scheme for the Third Initial-Boundary Value Problem for a Multidimensional Sobolev-Type Equation with Memory Effect”, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal [Vladikavkaz Mathematical Journal]*, **26:1** (2024), 36–55 (in Russian).
- [16] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N., *Linejnye i kvazilinejnye uravneniya parabolicheskogo tipa [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type]*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (in Russian), 736 pp.

- [17] Samarskij A.A., *Teoriya raznostnykh skhem [Theory of Difference Schemes]*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (in Russian), 616 pp.
- [18] Samarskij A.A., Gulin A.V., *Ustojchivost raznostnykh skhem [Stability of Difference Schemes]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (in Russian), 415 pp.

#### Author Info

1. **Beshtokov Murat Khamidbievich**

Leading Researcher in the Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

*Russia, 360004, Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, 89A Shortanova str.*

*E-mail: [beshtokov-murat@yandex.ru](mailto:beshtokov-murat@yandex.ru)*