

# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.6, 519.8

## ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕЛЕВЫХ КАНАЛОВ СОЕДИНЕНИЯ ПВО КАК ЗАДАЧА БЛОЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Калязин И.С.\* , Перевозчиков А.Г.\*\* , Скакодуб К.Р.\*\*\*

\*ООО «Совкомбанк Технологии», г. Одинцово

\*\*Тверской государственный университет, г. Тверь

\*\*\*ООО «СМАРТА», г. Тверь

---

*Поступила в редакцию 29.03.2026, после переработки 22.04.2026.*

---

Изучается динамическая задача целераспределения (ЦР) разнотипных средств ПВО по различным типам целей в оперативно-тактическом соединении, рассматриваемом как АСУ. В качестве критерия используется математическое ожидание количества прорвавшихся целей. Связь между циклами ЦР осуществляется при помощи штрафной функции, учитывающей математическое ожидание количества целей, не получивших воздействия, за время перенацеливания различных типов средств ПВО на другие типы целей. Такая постановка является новой и ее частным случаем является классическая постановка задачи ЦР на основе транспортной задачи (ТЗ). Показано, что поставленная динамическая задача ЦР сводится к блочной задаче выпуклого программирования и может быть решена методом проекции субградиента. Основным результатом работы является декомпозиция задачи на основе метода проекции субградиента, которая может служить методической основой для распараллеливания задачи.

**Ключевые слова:** динамическая задача целераспределения, штраф за изменение плана целераспределения, блочная задача выпуклого программирования, метод декомпозиции задачи на основе метода проекции субградиента, распараллеливание задачи.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 2. С. 83–96.*  
<https://doi.org/10.26456/vtpmk768>

### Введение

Работа основана на результатах из [1] и является ее дальнейшим развитием в части учета динамики, возникающей из связи соседних циклов ЦР при помощи штрафной функции, учитывающей математическое ожидание количества целей, не получивших воздействия, за время перенацеливания каналов соединения

---

© Калязин И.С., Перевозчиков А.Г., Скакодуб К.Р., 2026

ПВО, рассматриваемого как АСУ. Такие задачи распределения целевых каналов по групповым целям применительно к задачам флота изучались в [2], (см. также [11]). Поставленная динамическая задача ЦР сводится к блочной задаче выпуклого программирования и может быть решена методом проекции субградиента. Основным результатом работы является декомпозиция задачи на основе метода проекции субградиента Б. Т. Поляка [3], который может служить методической основой распараллеливания задачи. Классическая постановка задачи целераспределения изучалась нами в [4].

В общетеоретическом плане динамические постановки задачи о групповом назначении могут использоваться как основа построения соответствующих цифровых платформ распределения заданий по исполнителям [5]. В существующих платформах для решения транспортной задачи (ТЗ) и ее частного случая — задачи о назначениях — рассматривается в основном статический вариант задачи с горизонтом планирования в один период (см. [6], [7]). Поэтому изучение динамических ТЗ, к которым относится динамическая задача ЦР, поставленная в настоящей работе, является новой и актуальной задачей, а ее решение может служить основой для построения соответствующих АСУ соединения ПВО. Все полученные результаты являются новыми и имеют практическое применение при построении АСУ в оперативно-тактическом звене войск ВКО.

## 1. Классическая задача ЦР

Следуя [9] изложим классическую постановку задачи ЦР на основе ТЗ, которая нужна нам для дальнейших построений. Пусть, как в обычной задаче целераспределения (ЦР), через  $i = 1, \dots, m$ , обозначены типы средств ПВО, через  $j = 1, \dots, n$ , — типы целей. Даны величины:

- $a_i \geq 0$  — количество целевых каналов средств ПВО  $i$ -го типа,
- $b_j \geq 0$  — количество одиночных целей  $j$ -го типа.

Ищутся величины  $x_{ij}$  — количества каналов  $i$ -го типа, назначенных на цели  $j$ -го типа, удовлетворяющие обычным балансовым ограничениям

$$x_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где предполагается, что

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (2)$$

минимизирующие функцию математического ожидания (МОЖ) числа прорвавшихся целей

$$I(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} x_{ij}. \quad (3)$$

Здесь  $q_{ij}$  — вероятность не поражения средством ПВО  $i$ -го типа цели  $j$ -го типа.

## 2. Динамическое расширение задачи ЦР

Здесь и далее излагаются наши новые результаты в том числе новая постановка динамической задачи ЦР и ее декомпозиция на основе нового численного метода оптимизации. В динамической постановке вместо (3) используется недифференцируемый выпуклый показатель

$$J(x) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} x_{ij}(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \Delta x_{ij}^+(t) \right\} \rightarrow \min, \quad (4)$$

где

$$\Delta x_{ij}^+(t) = \max(\Delta x_{ij}(t); 0) \quad (5)$$

— верхняя срезка разности

$$\Delta x_{ij}(t) = x_{ij}(t+1) - x_{ij}(t). \quad (6)$$

Здесь  $r_{ij}$  — вероятность пролета цели  $j$ -го типа при перенацеливании на нее средства ПВО  $i$ -го типа. Это означает, что дополнительные непораженные цели за время перенацеливания связаны только с увеличением объема  $x_{ij}$  назначения, а не с его уменьшением.

Рассматривается задача с уравновешенным балансом:

$$\begin{aligned} a_i(t) &= \sum_{j=1}^n x_{ij}(t), \quad i = 1, \dots, m; \\ b_j(t) &= \sum_{i=1}^m x_{ij}(t), \quad j = 1, \dots, n; \\ x_{ij}(t) &\geq 0, \quad t = 0, \dots, T-1. \end{aligned} \quad (7)$$

Условие (2) предполагается выполненным. Обозначим множества точек  $x(t)$ , удовлетворяющих (7), через  $B(t)$ .

Показатель (4) необходимо минимизировать при ограничениях

$$x \in B = \prod_{t=-1}^{T-1} B(t). \quad (8)$$

## 3. Декомпозиция динамической задачи ЦР

Рассмотрим вспомогательную задачу для компонент  $x(t)$ : минимизировать

$$\begin{aligned} L_t(x) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} (x_{ij}(t) - x_{ij}(t-1))^+ - \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} x_{ij}(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} (x_{ij}(t+1) - x_{ij}(t))^+ \end{aligned} \quad (9)$$

при фиксированных  $x(t-1)$ ,  $x(t+1)$  и ограничениях

$$x(t) \in B(t). \quad (10)$$

Предполагается по умолчанию, что слагаемые в (9), содержащие  $x(-1)$ ,  $x(T)$ , отсутствуют. Очевидно, что справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** Для любого решения  $x$  задачи минимизации (4) при ограничениях (8) его компоненты являются решением вспомогательной задачи (9), (10).

Таким образом, лемма 1 очевидна. Субградиент показателя (9) по  $x(t)$  при фиксированных  $x(t-1), x(t+1)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \partial_{x(t)} L_t(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \partial_{x(t)} (x_{ij}(t) - x_{ij}(t-1))^+ \\ + \|q(t)\| + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \partial_{x(t)} (x_{ij}(t+1) - x_{ij}(t))^+. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\partial_{x(t)} L_t(x) = (\partial_{x_{ij}(t)} L_t(x), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$  — субградиент функции  $L_t(x)$  по  $x(t)$ ,  $\|\cdot\|$  — евклидова норма,

$$\partial_{x_{ij}(t)} (x_{ij}(t) - x_{ij}(t-1))^+ = \begin{cases} 1, & x_{ij}(t) - x_{ij}(t-1) \geq 0; \\ 0, & x_{ij}(t) - x_{ij}(t-1) < 0; \end{cases}$$

и

$$\partial_{x_{ij}(t)} (x_{ij}(t+1) - x_{ij}(t))^+ = \begin{cases} -1, & x_{ij}(t+1) - x_{ij}(t) \geq 0; \\ 0, & x_{ij}(t+1) - x_{ij}(t) < 0. \end{cases}$$

Имея субградиенты (11), для решения вспомогательной задачи можно теперь воспользоваться методом проекции субградиента с программным шагом [3, с. 187]:

$$x^{k+1}(t) = P_{B(t)} (x^k(t) - \alpha_k \partial_{x(t)} L_t(x^k(t))), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

где  $k$  — номер шага;  $\alpha_k \rightarrow 0$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$  — программный шаг метода;  $P_{B(t)}(\cdot)$  — оператор проектирования на компоненту  $B(t)$  множества допустимых управляющих воздействий  $W(t)$ . Очевидно, что внутренности множеств  $B(t)$  не пусты, а  $\partial_{x(t)} L_t(x)$  — ограничены в совокупности на  $B(t)$ . Тогда согласно результатам [3, с. 188] справедлива следующая теорема сходимости.

**Теорема 1.** Последовательность  $[x^k(t)]$  в методе (12) сходится к множеству решений задачи минимизации (9) при ограничениях (10).

Таким образом, Теорема 1 не требует доказательства. Рассмотрим «диагональный» процесс метода проекции градиента в целом для динамической задачи:

$$\begin{aligned} x^{k+1}(t) = P_{B(t)} (x^k(t) - a_k \text{abla}_{x(t)} L_t(x^k)), \quad \forall t \\ k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

который сходится по тем же причинам, причем метод проекции (12) субградиента как бы представляет его покомпонентную запись и тем самым осуществляет декомпозицию исходной задачи на вспомогательные блочные.

*Замечание 1.* Для решения вспомогательной задачи проектирования на множества  $B(t)$  на каждом шаге можно использовать конечный метод сопряженных градиентов из книги [3, с. 195] применительно к двойственной задаче [3, с. 297].

Задача проектирования может быть поставлена как задача:

$$\min \left[ \langle d, x \rangle + \frac{1}{2\gamma} \|x - a\|^2 \right], Ax \leq b, \quad (14)$$

где

$$d = \bar{0}, \quad \gamma = 1.$$

Двойственная задача имеет вид:

$$\begin{aligned} \min \left[ \frac{\gamma}{2} \|d + A^!T y\|^2 - \langle y, A^!a - b \rangle \right], y \geq 0 = \\ = \min \left[ \frac{1}{2} \langle A^!y, y \rangle - \langle y, e \rangle \right] = f(y), y \geq 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$A^! = AA^T, \quad e = Aa - b. \quad (16)$$

Исходная точка минимума связана с точкой минимума двойственной задачи формулой:

$$x^* = a - \gamma(A^!T y^* + d) = a - A^!T y^*. \quad (17)$$

Градиент показателя дается формулой:

$$ablaf(y) = A^!y - e. \quad (18)$$

### Пример 1.

Предположим, что в задаче с уравновешенным балансом

$$\begin{aligned} \|q_{ij}\| &= \begin{matrix} a_1(t) & \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix} \\ a_2(t) & \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix} \\ i/j & \begin{bmatrix} b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) \end{bmatrix} \end{matrix}, \\ \|r_{ij}\| &= \begin{matrix} a_1(t) & \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \\ a_2(t) & \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix} \\ i/j & \begin{bmatrix} b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) \end{bmatrix} \end{matrix}, \end{aligned}$$

и  $T = 2$ .

Тогда, исключая зависимые переменные, приходим к задаче:

$$\begin{aligned} L(x) &= q_{11} \{a_1(0) - (b_2(0) - x_{22}(0)) - (b_3(0) - x_{23}(0))\} \\ &+ q_{21} (a_2(0) - x_{22}(0) - x_{23}(0)) \\ &+ q_{12} (b_2(0) - x_{22}(0)) + q_{13} (b_3(0) - x_{23}(0)) \\ &+ q_{22}x_{22}(0) + q_{23}x_{23}(0) \\ &+ r_{11} \max \{ \Delta a_1(1) - (\Delta b_2(1) - \Delta x_{22}(1)) - (\Delta b_3(1) - \Delta x_{23}(1)); 0 \} \\ &+ r_{21} \max (\Delta a_2(1) - \Delta x_{22}(1) - \Delta x_{23}(1); 0) \\ &+ r_{12} \max (\Delta b_2(1) - \Delta x_{22}(1)) + r_{13} \max (\Delta b_3(1) - \Delta x_{23}(1); 0) \\ &+ r_{22} \max (\Delta x_{22}(1); 0) + r_{23} \max (\Delta x_{23}(2); 0) \\ &+ q_{11} \{a_1(1) - (b_2(1) - x_{22}(1)) - (b_3(1) - x_{23}(1))\} \\ &+ q_{21} (a_2(1) - x_{22}(1) - x_{23}(1)) \\ &+ q_{12} (b_2(1) - x_{22}(1)) + q_{13} (b_3(1) - x_{23}(1)) \\ &+ q_{22}x_{22}(1) + q_{23}x_{23}(2) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (19)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_1(t) - (b_2(t) - x_{22}(t)) - (b_3(t) - x_{23}(t)) &\geq 0, \\ a_2(t) - x_{22}(t) - x_{23}(t) &\geq 0, \quad b_2(t) - x_{22}(t) \geq 0, \quad b_3(t) - x_{23}(t) \geq 0, \\ x_{22}(t), \quad x_{23}(t) &\geq 0, \end{aligned} \quad (20)$$

или

$$\begin{aligned} a_2(t) &\geq x_{22}(t) + x_{23}(t) + b_2(t) + b_3(t) - a_1(t), \\ b_2(t) &\geq x_{22}(t) \geq 0, \quad b_3(t) \geq x_{23}(t) \geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Для трёхблочной модели показатели (19) примут вид:

$$\begin{aligned} L_0^\uparrow(x) &= q_{11} \{a_1(0) - (b_2(0) - x_{22}(0)) - (b_3(0) - x_{23}(0))\} \\ &\quad + q_{21} (a_2(0) - x_{22}(0) - x_{23}(0)) \\ &\quad + q_{12} (b_2(0) - x_{22}(0)) + q_{13} (b_3(0) - x_{23}(0)) \\ &\quad + q_{22}x_{22}(0) + q_{23}x_{23}(0) \\ &\quad + r_{11} \max \{ \Delta a_1(0) - (\Delta b_2(0) - \Delta x_{22}(0)) - (\Delta b_3(0) - \Delta x_{23}(0)); 0 \} \\ &\quad + r_{21} \max (\Delta a_2(0) - \Delta x_{22}(0) - \Delta x_{23}(0); 0) \\ &\quad + r_{12} \max (\Delta b_2(0) - \Delta x_{22}(0)) + r_{13} \max (\Delta b_3(0) - \Delta x_{23}(0); 0) \\ &\quad + r_{22} \max (\Delta x_{22}(0); 0) + r_{23} \max (\Delta x_{23}(0); 0), \end{aligned}$$

$$L_{x_{22}}^0 = q_{11} - q_{21} - q_{12} + q_{22} + r_{11} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{21} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{22} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$L_{x_{23}}^0 = q_{11} - q_{21} - q_{13} + q_{23} + r_{11} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{21} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{13} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{23} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{aligned} L_1^\uparrow(x) &= r_{11} \max \{ \Delta a_1(0) - (\Delta b_2(0) - \Delta x_{22}(0)) - (\Delta b_3(0) - \Delta x_{23}(0)); 0 \} \\ &\quad + r_{21} \max (\Delta a_2(0) - \Delta x_{22}(0) - \Delta x_{23}(0); 0) \\ &\quad + r_{12} \max (\Delta b_2(0) - \Delta x_{22}(0)) + r_{13} \max (\Delta b_3(0) - \Delta x_{23}(0); 0) \\ &\quad + r_{22} \max (\Delta x_{22}(0); 0) + r_{23} \max (\Delta x_{23}(0); 0) \\ &\quad + q_{11} \{a_1(1) - (b_2(1) - x_{22}(1)) - (b_3(1) - x_{23}(1))\} \\ &\quad + q_{21} (a_2(1) - x_{22}(1) - x_{23}(1)) \\ &\quad + q_{12} (b_2(1) - x_{22}(1)) + q_{13} (b_3(1) - x_{23}(1)) \\ &\quad + q_{22}x_{22}(1) + q_{23}x_{23}(1) \\ &\quad + r_{11} \max \{ \Delta a_1(1) - (\Delta b_2(1) - \Delta x_{22}(1)) - (\Delta b_3(1) - \Delta x_{23}(1)); 0 \} \\ &\quad + r_{21} \max (\Delta a_2(1) - \Delta x_{22}(1) - \Delta x_{23}(1); 0) \\ &\quad + r_{12} \max (\Delta b_2(1) - \Delta x_{22}(1)) + r_{13} \max (\Delta b_3(1) - \Delta x_{23}(1); 0) \\ &\quad + r_{22} \max (\Delta x_{22}(1); 0) + r_{23} \max (\Delta x_{23}(1); 0), \end{aligned}$$

$$L_{x_{22}}^1 = r_{11} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{21} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{12} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{22} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + q_{11} - q_{21} \\ - q_{12} + q_{22} + r_{11} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{21} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{22} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$L_{x_{23}}^1 = r_{11} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{21} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{13} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{23} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + q_{11} - q_{21} \\ - q_{13} + q_{23} + r_{11} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{21} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{13} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{23} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$L_2^\uparrow(x) = q_{11} \{a_1(2) - (b_2(2) - x_{22}(2)) - (b_3(2) - x_{23}(2))\} + q_{21} (a_2(2) - x_{22}(2) - x_{23}(2)) \\ + q_{12} (b_2(2) - x_{22}(2)) + q_{13} (b_3(2) - x_{23}(2)) + q_{22}x_{22}(2) + q_{23}x_{23}(2) \\ + r_{11} \max \{ \Delta a_1(1) - (\Delta b_2(1) - \Delta x_{22}(1)) - (\Delta b_3(1) - \Delta x_{23}(1)); 0 \} \\ + r_{21} \max (\Delta a_2(1) - \Delta x_{22}(1) - \Delta x_{23}(1); 0) \\ + r_{12} \max (\Delta b_2(1) - \Delta x_{22}(1)) + r_{13} \max (\Delta b_3(1) - \Delta x_{23}(1); 0) \\ + r_{22} \max (\Delta x_{22}(1); 0) + r_{23} \max (\Delta x_{23}(1); 0),$$

$$L_{x_{22}}^2 = q_{11} - q_{21} - q_{12} + q_{22} + r_{11} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{21} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{22} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$L_{x_{23}}^2 = q_{11} - q_{21} - q_{13} + q_{23} + r_{11} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{21} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{13} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + r_{23} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

### Пример 2.

Положим

$$a_1(0) = 5, \quad a_2(0) = 4, \quad b_1(0) = 2, \quad b_2(0) = 4, \quad b_3(0) = 3.$$

Тогда ограничения (21) имеют вид

$$4 \geq x_{22}(0) + x_{23}(0) \geq 2, \quad 3 \geq x_{23}(0) \geq 0.$$

### Пример 3.

Рассмотрим задачу проектирования точки  $a = (3, 3)^T$  на допустимое множество статической задачи на нулевом шаге в примере 1. Из Рис. 1 видно, что проекцией будет точка  $(2, 2)^T$ .

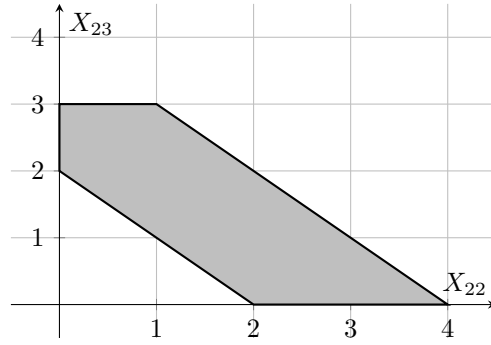


Рис. 1: Допустимая область на нулевом шаге

Матрица  $A$  ограничений (36), векторы  $b$  и  $y$  будут иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A = AA^T$  и вектор  $e$  равны:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Метод сопряженных направлений:

$$y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(y^0) = -e = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Множество индексов  $I_0$  и шаг  $\beta_0$  равны:

$$I_0 = \{i \mid y_i^0 = 0, \nabla f(y^0)_i > 0\} = \{2, 4\}; \quad \beta_0 = 0.$$

Сопряженный градиент

$$p^0, p_i^0 = \begin{cases} -\nabla f(y^0)_i, & \text{если } i \notin I_0; \\ 0, & \text{если } i \in I_0; \end{cases}$$

равен:

$$p^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^1 = y^0 + \alpha_0 p^0 = \begin{pmatrix} 2\alpha_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \alpha_0 \in [0, \infty).$$

Найдем производную функции  $F(\alpha_0) = f(y^0 + \alpha_0 p^0)$ :

$$\begin{aligned} F'_{\alpha_0}(\alpha_0) &= \langle \nabla f(y^0 + \alpha_0 p^0), p^0 \rangle = \\ &= \left\langle A \begin{pmatrix} 2\alpha_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \alpha_0 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= 8\alpha_0 - 4 = 0 \Rightarrow \alpha_0^* = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$y^1 = y^0 + \frac{1}{2} p^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla f(y^1) = Ay^1 - e = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Множество индексов  $I_1$  и шаг  $\beta_1$  равны:

$$I_1 = I_0 \cup \{i, y_i^1 = 0\} = \{2, 3, 4\}, I_1 \neq I_0 \Rightarrow \beta_1 = 0 \Rightarrow y^2 = y^1 = y^*.$$

Отсюда следует, что

$$x^* = a - A^T y^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

#### 4. Исключение зависимых переменных в общем случае

Исключим зависимые переменные. Например,

$$\begin{aligned} x_{ij} \geq 0, \quad x_{i1} = a_i - \sum_{j=2}^n x_{ij} \geq 0, \quad x_{1j} = b_j - \sum_{i=2}^m x_{ij} \geq 0, \\ i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (22)$$

При этом появляется  $m(n-1)$  дополнительных неравенств помимо условия неотрицательности переменных.

Подставляя (23) в показатель (3), получим критерий вида

$$\begin{aligned} I(x) &= q_{11} \left( a_1 - \sum_{j=2}^n (b_j - \sum_{i=2}^m x_{ij}) \right) + \\ &+ \sum_{i=2}^m q_{i1} (a_i - \sum_{j=2}^n x_{ij}) + \sum_{j=2}^n q_{1j} (b_j - \sum_{i=2}^m x_{ij}) + \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^n q_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (23)$$

## 5. Выбор диапазонов для параметров численного эксперимента

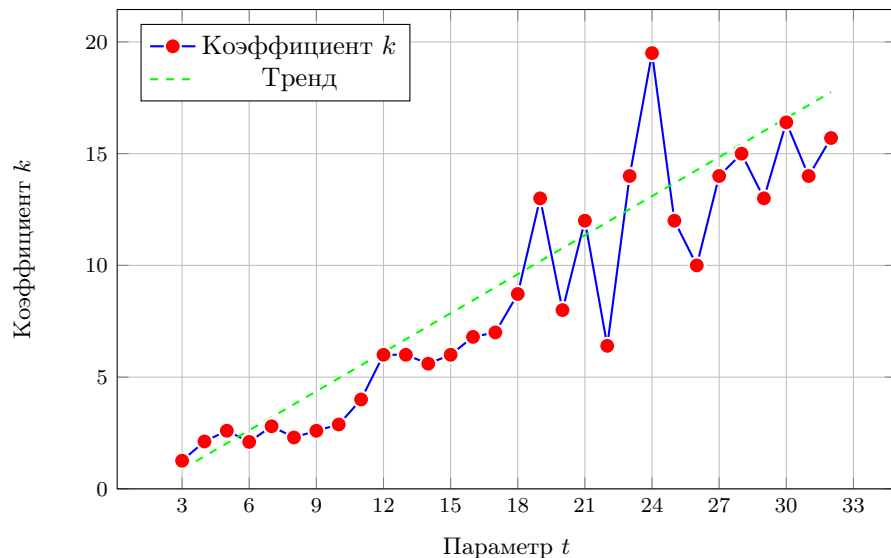
Положим в задаче (1) – (3):  $a_i \in [1, 5], b_i \in [1, 3], i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, m = 2, n = 2, t = 3$  при условии, что  $b_3 = a_1 + a_2 - b_1 - b_2 \geq 0$ .

*Замечание 2.* Все величины предполагаются случайными, равномерно распределенными на соответствующих отрезках.

## 6. Анализ результатов эксперимента

В ходе работы для распараллеливания задачи был реализован алгоритм метода проекции субградиента для данной задачи на языке C++17. Это один из методов распараллеливания на основе численных методов оптимизации [8]. Для проверки гипотезы, что асимптотически коэффициент ускорения  $k$  будет равен  $t$ , нужно использовать многопроцессорный вычислительный комплекс (МВК) с параллельной передачей данных на процессоры.

Для проведения эксперимента был выбран личный МВК, собранный на плате ASUS и процессорах марки ZEON. В вычислениях участвовали 32 процессора, что достаточно хорошо позволяет описать на графике линию тренда коэффициента ускорения в зависимости от длительности дискретного времени  $t$ . В результате был построен линейный тренд  $k = 0,582t + 0,876$ .



**Рис. 2:** График зависимости коэффициента  $k$  от параметра  $t$

Таким образом, гипотеза об асимптотической линейности коэффициента  $k$  как функции дискретного времени  $t$  можно считать оправданной. Для более точного изучения поведения функции  $k(t)$  нужно увеличивать количество процессоров, совпадающих с  $t$ , а для этого увеличивать мощности МВК, что предполагается сделать в дальнейшей работе.

Гипотеза о том, что асимптотически коэффициент ускорения равен  $t$ , очевидно, справедлива для независимых блоков, поэтому можно считать, что уменьшение коэффициента линейного тренда до 0,582 в проведенном статистическом эксперименте связано с «платой» за связь между блоками, которая уже нетривиальна и сложность которой можно считать пропорциональной размерности матрицы  $x(t)$ .

В данном эксперименте матрица  $x(t)$  имела фиксированную размерность  $2 \times 3$ . Линейный тренд, приведенный выше, построен именно для этой размерности. В дальнейшем предполагается исследование зависимости коэффициента наклона линейного тренда от размерности. В качестве гипотезы можно предположить, что наклон линейного тренда будет убывать с ростом размерности.

## Заключение

В статье изучена непрерывно-дискретная задача целераспределения разнотипных средств соединения ПВО, рассматриваемых как АСУ, по разнотипным воздушным групповым целям нападения в динамической постановке по критерию математического ожидания числа прорвавшихся целей. Показано, что динамическая задача ЦР сводится к решению блочной задачи выпуклого программирования, для решения которой можно использовать метод проекции субградиента. Проектирование на выпуклые полиэдральные множества в блоках может быть осуществлено при помощи конечного двойственного метода сопряженных градиентов.

Проводится статистический эксперимент по проверке практической сходимости метода проекции субградиента. Результаты статистического эксперимента показывают, что уже при  $t = 3$ , коэффициент ускорения больше единицы, а в дальнейшем асимптотически стремится к линейному тренду  $k = 0,582t + 0,876$ . Таким образом, гипотезу об асимптотической линейности коэффициента  $k$ , как функции дискретного времени  $t$ , можно считать доказанной.

## Список литературы

- [1] Ватаманюк О.А., Грибов А.А., Морозов А.В., Перевозчиков А.Г., Яночкин И.Е. Задача планирования огневого удара, как задача субмодулярного программирования // Научный вестник ВА ВКО. 2022. № 4 (4). С. 95–104.
- [2] Волгин Н.С. Исследование операций. Санкт-Петербург: Изд-во ВМА им. Н.Г. Кузнецова, 1999.
- [3] Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
- [4] Лесик А.И., Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю. К задаче распределения разнотипных средств обороны по критерию разности потерь // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 2. С. 26–39.
- [5] Лесик И.А., Перевозчиков А.Г. Динамическая модель рынка разработки программного обеспечения на основе задачи о назначении на узкие места // Экономика и математические методы. 2021. Т. 57, № 4. С. 108–116.

- [6] Сергиенко А.М., Симоненко В.П., Симоненко А.В. Улучшенный алгоритм назначения для планировщиков заданий в неоднородных распределительных вычислительных системах // Системні дослідження та інформаційні технології. 2016. № 2. С. 20–35.
- [7] Устюжанина Е.В., Дементьев В.Е., Евсюков С.Г. Транзакционные цифровые платформы: задача обеспечения эффективности // Экономика и математические методы. 2021. Т. 57, № 1. С. 5–18.
- [8] Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1981.
- [9] Любушкин М.С. Анализ и оценка эффективности боевых действий Войск ПВО Страны. Тверь: Изд-во ВА ВКО, 1979. 226 с.

#### Образец цитирования

Калязин И.С., Перевозчиков А.Г., Скакодуб К.Р. Динамическая задача распределения целевых каналов соединения ПВО как задача блочного программирования // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2026. № 2. С. 83–96. <https://doi.org/10.26456/vtprmk768>

#### Сведения об авторах

**1. Калязин Илья Сергеевич**

ведущий разработчик ООО «Совкомбанк Технологии».

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Хромова, д. 13, корп. 1.*

*E-mail: [thegreadbrain@gmail.com](mailto:thegreadbrain@gmail.com)*

**2. Перевозчиков Александр Геннадьевич**

профессор кафедры компьютерной безопасности и математических методов управления Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Прошина, д. 5, корп. 2.*

*E-mail: [pere501@yandex.ru](mailto:pere501@yandex.ru)*

**3. Скакодуб Константин Романович**

программист-разработчик ООО «СМАРТА».

*Россия, 171509, Тверская обл., п. Заволжский, ул. Цветочная, д. 24.*

*E-mail: [skakodub03@bk.ru](mailto:skakodub03@bk.ru)*

# DYNAMIC TARGET CHANNEL ALLOCATION PROBLEM FOR AIR DEFENSE FORMATION AS A BLOCK PROGRAMMING PROBLEM

Kalyazin I.S.\* , Perevozchikov A.G.\*\* , Skakodub K.R.\*\*\*

\*Sovcombank Technologies LLC, Odintsovo

\*\*Tver State University, Tver

\*\*\*SMARTA LLC, Tver

---

Received 29.03.2026, revised 22.04.2026.

---

The paper studies a dynamic target allocation (TA) problem for heterogeneous air defense assets against various target types within an operational-tactical formation modeled as an automated control system. The optimality criterion is the minimum expected number of penetrated targets. Coupling between TA cycles is implemented via a penalty function that accounts for the expected number of targets not engaged during the retargeting time of different air defense asset types. Such a statement is new and its special case is the classical TA problem based on the transportation problem. It is shown that the proposed dynamic TA problem reduces to a block convex programming problem and can be solved by the subgradient projection method. The main contribution is a problem decomposition based on the subgradient projection method, which can serve as a methodological foundation for parallelization.

**Keywords:** dynamic target allocation problem, penalty for changing the allocation plan, reduction to block convex programming, problem decomposition via subgradient projection method, parallelization.

## Citation

Kalyazin I.S., Perevozchikov A.G., Skakodub K.R., “Dynamic target channel allocation problem for air defense formation as a block programming problem”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2026, № 2, 83–96 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk768>

## References

- [1] Vatamanyuk O.A., Gribov A.A., Morozov A.V., Perevozchikov A.G., Yanochkin I.E., “The Problem of Fire Strike Planning as a Submodular Programming Problem”, *Nauchnyj vestnik VA VKO [Scientific Bulletin of the Military Academy of Aerospace Defense]*, 2022, № 4 (4), 95–104 (in Russian).
- [2] Volgin N.S., *Issledovanie Operatsij [Operations Research]*, Naval Academy named after N.G. Kuznetsova, SPb., 1999 (in Russian).
- [3] Polyak B.T., *Vvedenie v Optimizatsiyu [Introduction to Optimization]*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (in Russian).

- [4] Lesik A.I., Perevozchikov A.G., Reshetov V.Yu., “On the Problem of Distributing Different-Type Defense Assets by the Loss Difference Criterion”, *Vestnik Tver State University. Series: Applied Mathematics*, 2019, № 2, 26–39 (in Russian).
- [5] Lesik I.A., Perevozchikov A.G., “Dynamic Model of the Software Development Market Based on the Bottleneck Assignment Problem”, *Ekonomika i matematicheskie metody [Economics and Mathematical Methods]*, **57**:4 (2021), 108–116 (in Russian).
- [6] Sergienko A.M., Simonenko V.P., Simonenko A.V., “Improved Assignment Algorithm for Job Schedulers in Heterogeneous Distributed Computing Systems”, *Sistemni doslidzheniya ta informatsijni tekhnologii [System Research and Information Technologies]*, 2016, № 2, 20–35 (in Russian).
- [7] Ustyuzhanina E.V., Dementev V.E., Evsyukov S.G., “Transactional Digital Platforms: The Problem of Ensuring Efficiency”, *Ekonomika i matematicheskie metody [Economics and mathematical methods]*, **57**:1 (2021), 5–18 (in Russian).
- [8] Tsurkov V.I., *Dekompozitsiya v zadachakh bolshoj razmernosti [Decomposition in Large-Scale Problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (in Russian).
- [9] Lyubushkin M.S., *Analiz i otsenka effektivnosti boevykh dejstvij Vojsk PVO Strany [Analysis and Evaluation of the Combat Effectiveness of the Country’s Air Defense Forces]*, VA VKO Publ., Tver, 1979 (in Russian), 226 pp.

#### Author Info

1. **Kalyazin Ilia Sergeevich**

The leading developer of Sovcombank Technologies LLC.

*Russia, 170100, Tver, Khromova str., 13, building 1.*

*E-mail: [thegreadbrain@gmail.com](mailto:thegreadbrain@gmail.com)*

2. **Perevozchikov Aleksandr Gennadyevich**

Professor at the Department of Computer Security and Mathematical Management Methods, Tver State University.

*Russia, 170100, Tver, Proshina str., 5, building 2.*

*E-mail: [pere501@yandex.ru](mailto:pere501@yandex.ru)*

3. **Skakodub Konstantin Romanovich**

Programmer-developer at SMARTA LLC.

*24 Tsvetochnaya str., Zavolzhsy settlement, Tver Region, 171509, Russia.*

*E-mail: [skakodub03@bk.ru](mailto:skakodub03@bk.ru)*