ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 510.676, 519.7

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОВЕСНЫХ ФУНКЦИЙ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПРИТЯГИВАЮЩЕЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Баранова О.Е., Гусев А.И., Ксендз З.А.
Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 02.09.2015, после переработки 10.09.2015.

В работах [2-5] изучались свойства равновесных функций голоморфных отображений. Там же были приведены примеры равновесных функций комплексных полиномов. В настоящей работе приводятся два новых метода конструирования равновесных функций.

Ключевые слова: голоморфная функция, равновесная функция, область притяжения неподвижной точки, множество Жюлиа.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 85–100.

Введение

Все известные определения и факты, связанные с голоморфной динамикой, которые используются в данной работе, можно найти, например, в книге [1].

Мы будем использовать следующие обозначения. Для $r > 0$ и $z_0 \in \mathbb{C}$

$$O_{z_0,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

$$S_{z_0,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Для $A \subset \mathbb{C}$ и $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\rho(z_0, A) = \inf\{|z - z_0| : z \in A\},$$

$$M_{A,z} = \{u \in A : \rho(u, z) = \rho(z, A)\}.$$

Для отображения $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ по определению полагаем

$$f^{\circ 0}\text{– тождественное отображение,} \qquad f^{\circ(n+1)} = f \circ f^{\circ n}.$$

Отображения $f^{\circ n}$ называют итерациями отображения f.

Множество $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ называется вполне инвариантным для отображения $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, если

$$f(A) \subset A \qquad \text{и} \qquad f^{-1}(A) \subset A.$$

Неподвижная точка $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ называется притягивающей для отображения f, если найдется окрестность U_{z_0} этой точки такая, что

$$\lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(z) = z_0$$

для любой точки $z \in U_{z_0}$.

Известно, что неподвижная точка $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ является притягивающей для голоморфного отображения f тогда и только тогда, когда $|f'(z_0)| < 1$ [1].

Если $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ – притягивающая неподвижная точка отображения f, то множество

$$A_{f,z_0} = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(z) = z_0\}$$

называется областью притяжения точки z_0.

Область притяжения неподвижной точки является открытым множеством.

В работе используется понятие множества Жюлиа голоморфного отображения f (обозначается J_f). Определение этого понятия можно найти, например, в монографии [1]. Мы будем использовать следующие свойства множества Жюлиа, приведенные в той же монографии.

Множество Жюлиа компактно и вполне инвариантно.

Множество Жюлиа голоморфного отображения $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ совпадает с границей области притяжения любой притягивающей неподвижной точки этого отображения.

Для полинома $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ множество Жюлиа совпадает с топологической границей множества тех $z \in \hat{\mathbb{C}}$, для которых последовательность $\{f^{\circ n}(z)\}$ ограничена.

1. Пример равновесной функции для полинома с одной притягивающей неподвижной точкой

Определение 1. *Непрерывную функцию $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ будем называть равновесной для отображения $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ на множестве $B \subset \mathbb{C}$, если $f(B) \subset B$ и*

$$h(f(z)) \le h(z) \tag{1}$$

для любой точки $z \in B$.

Рассмотрим отображение

$$f(z) = \lambda z(1 - z), \quad 0 < \lambda < 1. \tag{2}$$

Точка $z_0 = 0$ является притягивающей неподвижной точкой этого отображения. Область притяжения $A = A_{f,0}$ этой точки показана на Рис. 1. Граница этой области является жордановой кривой и совпадает с множеством Жюлиа функции f. При этом $\overline{A} = A \cup J_f$. Множество A и множество $\overline{A}$ вполне инвариантны. Последнее из этих множеств компактно. Кроме того, область A содержит круг

$$O_{\frac{1}{2},r} = \left\{z \in \hat{\mathbb{C}} : \left|z - \frac{1}{2}\right| < r\right\}, \qquad r = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}.$$

Отображение f имеет еще одну неподвижную точку (отталкивающую) $z_{fix} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$. Изображение области A приведено на Рис. 1.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим множества

$$\Phi_n = \{z \in \mathbb{C} : |f^{\circ n}(z)| - |z_{fix}| = 0\},$$

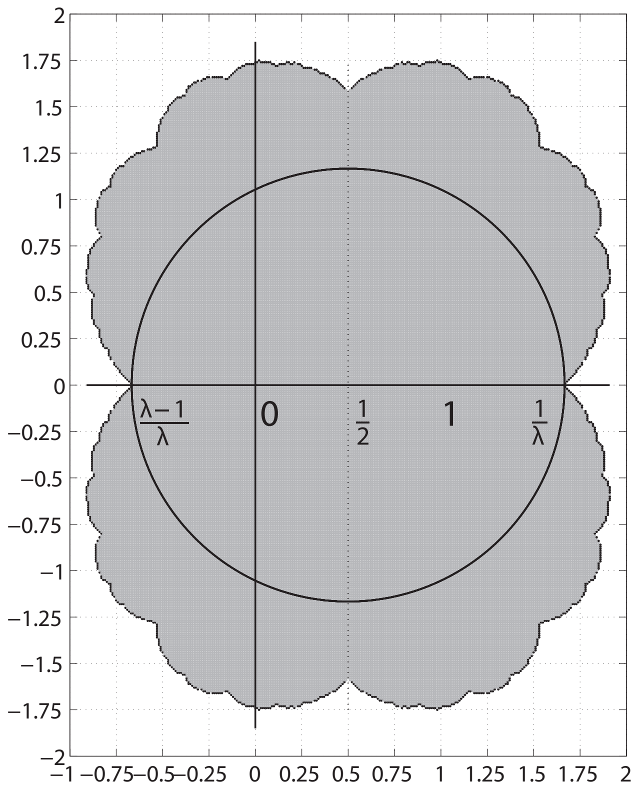

Рис. 1: Область притяжения точки $z_0 = 0$ для $\lambda = \frac{3}{5}$

$$B_n = \{z \in \mathbb{C} : |f^{\circ n}(z)| - |z_{fix}| < 0\}$$

и рассмотрим функцию $h_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, определенную равенством

$$h_n(z) = \begin{cases} -\rho(z, J_f), & z \in \mathbb{C}\backslash\overline{A}, \\ 0, & z \in \ \overline{A}\backslash B_n, \\ |f^{\circ n}(z)| - |z_{fix}|, & z \in B_n. \end{cases} \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что эта функция непрерывна на всей комплексной плоскости. Мы покажем, что она является равновесной для f, то есть имеет место неравенство

$$h_n(f(z)) \leqslant h_n(z), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Поскольку множества $\overline{A}$ и $\mathbb{C}\backslash\overline{A}$ вполне инвариантны, достаточно проверить, что неравенство (4) верно для $z \in \overline{A}$ и для $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{A}$.

Для случая $z \in \overline{A}$ нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если* $0 < \lambda < 1$, $\;r = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}$ *и* $z \in \overline{O}_{\frac{1}{2},r}$, *то имеет место неравенство*

$$|f(z)| \leq |z|.$$

При этом равенство имеет место только в неподвижных точках.

Доказательство. Нужный результат вытекает из следующей цепочки преобразований:

$$|f(z)| = |\lambda z(1-z)| = |\lambda||z||1-z| = \lambda|z|\left|\frac{1}{2} - z + \frac{1}{2}\right| \le \lambda|z|\left(\left|\frac{1}{2} - z\right| + \frac{1}{2}\right) \le$$

$$\le \lambda|z|\left(r + \frac{1}{2}\right) = \lambda|z|\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = |z|.$$

Далее, равенство $|f(z)| = |z| \iff |\lambda z(1-z)| = |z|$ имеет место тогда и только тогда, когда либо $z = 0$, либо $|1-z| = \frac{1}{\lambda}$. Окружности $\left\{z : |z - \frac{1}{2}| = r\right\}$ и $\left\{z : |1-z| = \frac{1}{\lambda}\right\}$ имеют ровно одну общую точку $z = z_{fix}$. □

Лемма 2. *Если* $0 < \lambda < 1, r = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}$*, то имеет место включение*

$$f\left(O_{\frac{1}{2},r}\right) \subset O_{\frac{1}{2},r}.$$

При этом границы множеств $f\left(O_{\frac{1}{2},r}\right)$ *и* $O_{\frac{1}{2},r}$ *имеют ровно одну общую точку* $z = z_{fix}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{r} \le r$ и $z = \frac{1}{2} + \tilde{r}e^{i\varphi}$. Тогда

$$\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| = \left|\lambda z(1-z) - \frac{1}{2}\right| = \left|\lambda\left(\frac{1}{2} + \tilde{r}e^{i\varphi}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \tilde{r}e^{i\varphi}\right)\right) - \frac{1}{2}\right| =$$

$$= \left|\lambda\left(\frac{1}{4} - \tilde{r}^2e^{2i\varphi}\right) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2} - \lambda\tilde{r}^2e^{2i\varphi}\right| \le \left|\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2}\right| + \lambda\tilde{r}^2\left|e^{2i\varphi}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4} + \lambda r^2 = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4} + \lambda\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{\lambda} - 1 + \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} = r.$$

□

Лемма 3. *Если* $0 < \lambda < 1, \quad r = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}$*, то имеет место включение*

$$B_1 \subset O_{\frac{1}{2},r}.$$

При этом границы множеств B_1 *и* $O_{\frac{1}{2},r}$ *имеют ровно две общие точки* $z = z_{fix}$ *и* $z = 1 - z_{fix}$.

Доказательство. Пусть $z \in B_1$, т.е. $|f(z)| - |z_{fix}| < 0$. Предположим, что $z \notin O_{\frac{1}{2},r}$, то есть $\left|z - \frac{1}{2}\right| \ge r$. Представляя элемент z в виде $z = \frac{1}{2} + \tilde{r}e^{i\varphi}$, $\tilde{r} \ge r$, можем записать

$$|f(z)| = |\lambda z(1-z)| = \lambda\left|\left(\frac{1}{2} + \tilde{r}e^{i\varphi}\right)\left(\frac{1}{2} - \tilde{r}e^{i\varphi}\right)\right| = \lambda\left|\frac{1}{4} - \tilde{r}^2e^{2i\varphi}\right| \ge$$

$$\ge \lambda \min\left\{\left|\frac{1}{4} - \tilde{r}^2e^{2i\varphi}\right| : 0 < \varphi \le 2\pi\right\} = \lambda\left(\tilde{r}^2 - \frac{1}{4}\right) \ge \lambda\left(r^2 - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \lambda\left(\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\lambda} - 1 = -z_{fix} = |z_{fix}|.$$

Отсюда $|f(z)| - |z_{fix}| \ge 0$, что противоречиво. □

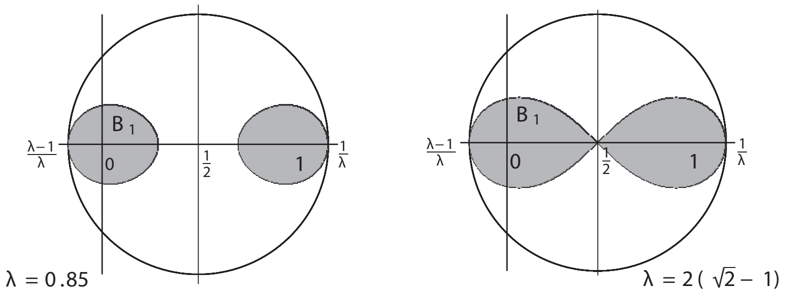

Рис. 2: Множество B_1 *для* $\lambda = 0.85$ *и* $\lambda = 2\sqrt{2} - 1$

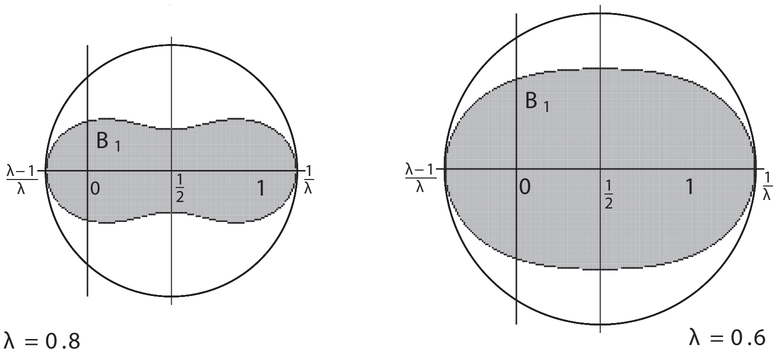

Рис. 3: Множество B_1 *для* $\lambda = 0.8$ *и* $\lambda = 0.6$

На Рис. 2, 3 приведена иллюстрация этой леммы для различных значений λ.

Лемма 4. *Пусть* $0 < \lambda < 1$. *Тогда* $f(B_1) \subset B_1$.

Доказательство. Предположим, что $f(z) \notin B_1$ для некоторого $z \in B_1$. Тогда имеет место неравенство

$$|f(f(z))| - |z_{fix}| \geq 0.$$

С другой стороны, включение $z \in B_1$ показывает, что $|f(z)| - |z_{fix}| < 0$. Согласно леммам 2 и 3, имеет место включение $f(z) \in O_{\frac{1}{2},r}$. В силу леммы 1, верно неравенство $|f(f(z))| \leq |f(z)|$. Тогда

$$|f(f(z))| - |z_{fix}| \leq |f(z)| - |z_{fix}| < 0,$$

что противоречиво. □

Лемма 5. *Пусть* $0 < \lambda < 1, \quad r = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \quad$ *и* $\quad z \in S_{\frac{1}{2},r}$. *Тогда*

$$|f(z)| - |z_{fix}| \geq 0.$$

Доказательство. Представляя элемент $z \in S_{\frac{1}{2},r}$ в виде $z = \frac{1}{2} + re^{i\varphi}$, можем записать

$$|f(z)| = |\lambda z(1-z)| = \lambda \left| \left(\frac{1}{2} + re^{i\varphi}\right)\left(\frac{1}{2} - re^{i\varphi}\right) \right| = \lambda \left| \frac{1}{4} - r^2 e^{2i\varphi} \right| \geq$$

$$\geq \lambda \min \left\{ \left| \frac{1}{4} - r^2 e^{2i\varphi} \right| : 0 < \varphi \leq 2\pi \right\} = \lambda \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) =$$

$$= \lambda \left(\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{\lambda} - 1 = -z_{fix} = |z_{fix}|.$$

□

Лемма 6. *Пусть* $0 < \lambda < 1$. *Тогда*

$$f(B_{n+1}) \subset B_n.$$

Доказательство. Выберем $w \in f(B_{n+1})$, то есть $w = f(z)$ для некоторого $z \in B_{n+1}$. В этом случае, $|f^{\circ(n+1)}(z)| - |z_{fix}| < 0$. Переписав это соотношение в виде $|f^{\circ n}(f(z))| - |z_{fix}| < 0$, видим, что $w = f(z) \in B_n$. □

Лемма 7. *Пусть* $0 < \lambda < 1$. *Тогда*

$$B_n \subset B_{n+1}.$$

Доказательство. Если $z \in B_1$, то $|f(z)| - |z_{fix}| < 0$. Используя леммы 1, 2, 3, можем написать $|f^{\circ 2}(z)| - |z_{fix}| < |f(z)| - |z_{fix}| < 0$. Это означает, что $z \in B_2$ и, значит, $B_1 \subset B_2$.

Предположим теперь, что $B_n \subset B_{n+1}$, и покажем, что тогда $B_{n+1} \subset B_{n+2}$.

Пусть $z \in B_{n+1}$, т.е. $|f^{\circ(n+1)}(z)| - |z_{fix}| < 0$. Согласно лемме 6, имеют место включения $f(z) \in f(B_{n+1}) \subset B_n \subset B_{n+1}$. Тогда $|f^{\circ(n+2)}(z)| - |z_{fix}| < 0$ и, следовательно, $z \subset B_{n+2}$, что и требовалось. □

Лемма 8. *Пусть* $0 < \lambda < 1$. *Тогда*

$$f^{\circ n}(B_{n+1}) \subset B_1.$$

Доказательство. Предположим, что $f^{\circ n}(z) \notin B_1$ для некоторого $z \in B_{n+1}$. Тогда

$$|f^{\circ(n+1)}(z)| - |z_{fix}| = |f(f^{\circ n}(z))| - |z_{fix}| \geq 0.$$

Это противоречит включению $z \in B_{n+1}$. □

Следствие 1. *Имеют место включения*

$$f(B_n) \subset B_n, \qquad f^{\circ n}(B_n) \subset B_1 \subset O_{\frac{1}{2},r}.$$

Теперь вернемся к доказательству равновесности функции h_n, то есть покажем справедливость неравенства (4). Сначала докажем, что это неравенство верно для $z \in \overline{A}$.

Если $z \in \overline{A} \backslash B_n$ и $f(z) \in \overline{A} \backslash B_n$, то $h_n(z) = h_n(f(z)) = 0$. Если $z \in \overline{A} \backslash B_n$ и $f(z) \in B_n$, то $h_n(z) = 0$ и $h_n(f(z)) = |f^{\circ n}(f(z))| - |z_{fix}| < 0$. В этом случае $h_n(f(z)) < h_n(z)$.

Пусть теперь $z \in B_n$. Тогда верно равенство $h_n(z) = |f^{\circ n}(z)| - |z_{fix}|$. Согласно следствию 1 к лемме 8, имеет место включение $f(z) \in f(B_n) \subset B_n$. Тогда

$$h_n(f(z)) = |f^{\circ n}(f(z))| - |z_{fix}| = |f^{\circ (n+1)}(z)| - |z_{fix}|.$$

Снова из следствия 1 к лемме 8 вытекает включение $f^{\circ n}(z) \in O_{\frac{1}{2},r}$. Из леммы 1 следует, что верно неравенство $|f^{\circ (n+1)}(z)| \leq |f^{\circ n}(z)|$. Поэтому

$$h_n(f(z)) = |f^{\circ (n+1)}(z)| - |z_{fix}| \leq |f^{\circ n}(z)| - |z_{fix}| = h_n(z).$$

Проверим теперь, что неравенство (4) выполняется на множестве $\mathbb{C} \backslash \overline{A}$. Для этого докажем справедливость неравенства

$$\rho(f(z), J_f) \geqslant \rho(z, J_f), \text{ для } z \in \mathbb{C} \backslash \overline{A}.$$

Пусть $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{A}$. Так как компактное множество J_f и множество $\mathbb{C} \backslash \overline{A}$ вполне инвариантны, то $M_{J_f,z} \cap S_{z,\rho(z,J_f)} \neq \varnothing$.

Покажем, что имеет место включение $O_{z,\rho(z,J_f)} \subset \mathbb{C} \backslash \overline{A}$.

Действительно, пусть $v \in O_{z,\rho(z,J_f)}$ и, следовательно, $|z - v| < \rho(z, J_f)$. Предположим, что $v \notin \mathbb{C} \backslash \overline{A}$. Тогда $v \in \overline{A} = A \cup J_f$. Если $v \in J_f$, то $|z - v| \geq \rho(z, J_f)$, чего нет. Если $v \in A$, то на отрезке, соединяющем точки z и v найдется точка s, принадлежащая множеству J_f. В этом случае $|z - v| > |z - s| \geq \rho(z, J_f)$, что противоречиво.

Поскольку множество $\mathbb{C} \backslash \overline{A}$ вполне инвариантно, то имеет место включение.

$$f(O_{z,\rho(z,J_f)}) \subset \mathbb{C} \backslash \overline{A}.$$

Непосредственно проверяется, что для любых $w, v \in \mathbb{C}$ имеет место равенство

$$|f(w) - f(v)| = \lambda |w - v||1 - w - v|. \tag{5}$$

Пусть $\tilde{u} \in M_{J_f,z}$, $r_0 = |z - \frac{1}{2}|$, $\tilde{r} = |z - \tilde{u}| = \rho(z, J_f)$, $u \in S_{z,\tilde{r}}$. Поскольку $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{A}$ и $O_{\frac{1}{2},\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2}} \subset A$, то $r_0 > \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}$. А так как $O_{\frac{1}{2},\tilde{r}} \subset \mathbb{C} \backslash \overline{A}$ и $O_{\frac{1}{2},\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2}} \subset A$, то и $r_0 - \tilde{r} > \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}$. Учитывая ограничения $0 < \lambda < 1$, заключаем, что $r_0 - \tilde{r} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Полагая

$$z = \frac{1}{2} + r_0 \cdot e^{i\varphi},$$

$$u = z + \tilde{r} \cdot e^{i\psi},$$

соотношение (5) можно переписать в виде

$$|f(z) - f(u)| = \lambda \tilde{r} \cdot \left| 1 - \frac{1}{2} - r_0 \cdot e^{i\varphi} - \frac{1}{2} - r_0 \cdot e^{i\varphi} - \tilde{r} \cdot e^{i\psi} \right| = \lambda \tilde{r} |2r_0 \cdot e^{i\varphi} + \tilde{r} \cdot e^{i\psi}|.$$

Оценка снизу правой части последнего равенства дает

$$|f(z)-f(u)| \geqslant \lambda\tilde{r}(2r_0-\tilde{r}) = \lambda\tilde{r}(r_0+r_0-\tilde{r}) = \lambda\tilde{r}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \tilde{r}.$$

Это неравенство верно для любого $u \in S_{z,\rho(z,J_f)}$ и поэтому

$$S_{f(z),\tilde{r}} \subset f(O_{z,\tilde{r}}) \subset \mathbb{C}\backslash\overline{A}.$$

Отсюда следует справедливость неравенства

$$\rho(f(z),J_f) > \tilde{r} = \rho(z,J_f),$$

что и требовалось.

Геометрическая интерпретация последней оценки приведена на Рис. 4.

Динамику поведения множеств B_n в зависимости от n можно проследить по Рис. 3 ($\lambda = 0.6$) и Рис. 5. Графики функций функций h_n представлены на Рис. 6-8

Отметим, что кроме неподвижной точки $z_0 = 0$, точками минимума h_n являются также прообразы этой неподвижной точки при отображении f (Рис. 6-8).

Замечание 1. Из определения притягивающей неподвижной точки следует, что

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (f^{\circ n})^{-1}\left(O_{\frac{1}{2},r}\right) = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = A. \qquad (6)$$

Положим

$$D_n = (f^{\circ n})^{-1}(z_{fix}) \quad \text{и} \quad D = \bigcup_{n=0}^{\infty} (f^{\circ n})^{-1}(z_{fix}).$$

Нетрудно проверить справедливость соотношений

$$D_n \subset B_n \qquad \text{и} \qquad D_n \subset (f^{\circ n})^{-1}\left(O_{\frac{1}{2},r}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Множество D является всюду плотным в J_f ([1], 4.10) и, следовательно, всюду плотно на границе каждого из множеств равенства (6). Эти соображения позволяют считать, что площадь множества $A\backslash B_n$ стремится к нулю, если $n \to \infty$.

2. Пример равновесной функции для рациональной функции на области притяжения притягивающей неподвижной точки

Пусть $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ – рациональное отображение степени не меньше 2, $z_0 \in \mathbb{C}$ притягивающая неподвижная точка для этого отображения с мультипликатором $\lambda = f'(z_0)$, $|\lambda| < 1$. Не ограничивая общности, можно считать, что $z_0 = 0$. Как и выше

$$A_f = \left\{z \in \hat{\mathbb{C}} : \lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(z) = 0\right\}$$

область притяжения точки 0. Границей этой области является множество Жюлиа отображения f ([1], 4.9).

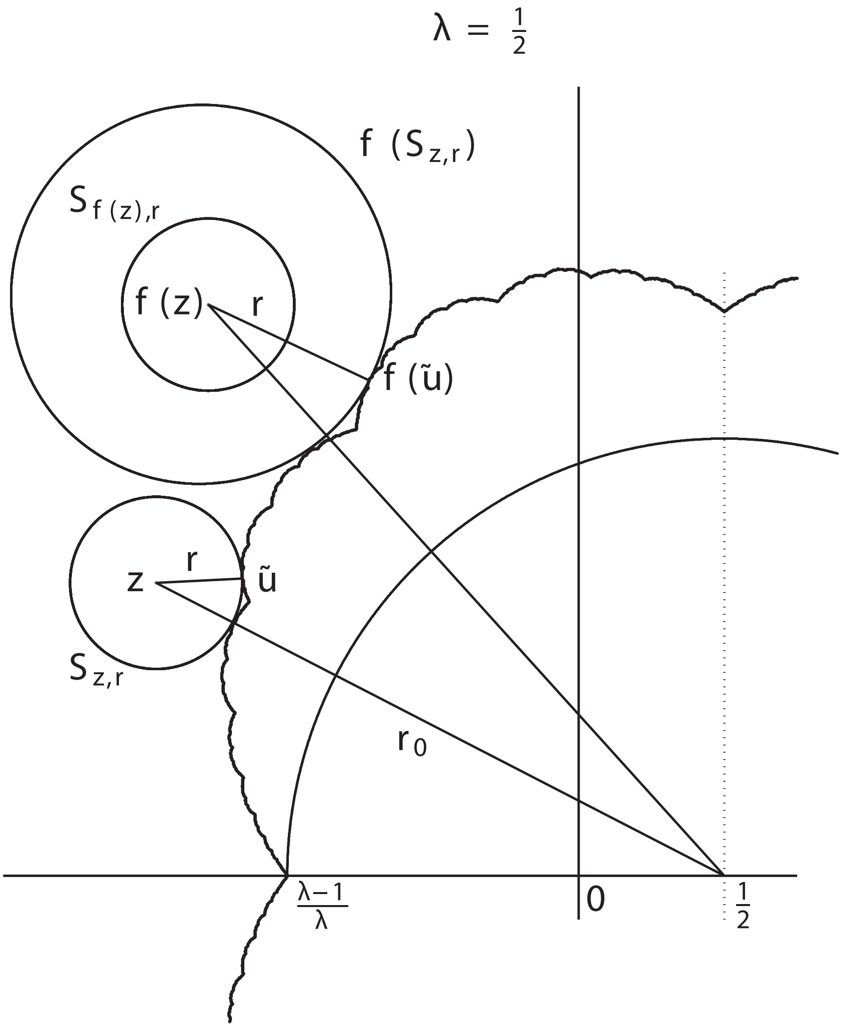

Рис. 4: Геометрическая иллюстрация к оценке (6)

Поскольку множества $\{|f^{\circ n}(z)| \ : \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ ограничены в совокупности по $z \in A_f$ и $\lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(z) = 0$ для каждого $z \in A_f$, то множества

$$I_z = \left\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : |f^{\circ n}(z)| = \sup \left\{|f^{\circ k}(z)| : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}\right\}$$

не пусты. Кроме того, если $z \neq 0$, эти множества конечны.

Рассмотрим функцию $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, определенную равенством

$$h(z) = \sup \left\{|f^{\circ k}(z)| : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Легко видеть, что неравенство $h(f(z)) \leq h(z)$ верно для любого элемента $z \in A_f$. Покажем, что эта функция непрерывна на множестве A_f.

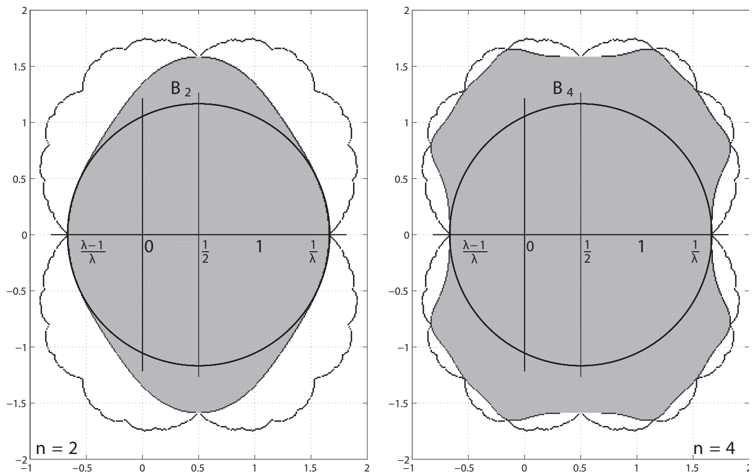

Рис. 5: Множества B_2 *и* B_4 *для* $\lambda = \frac{3}{5}$

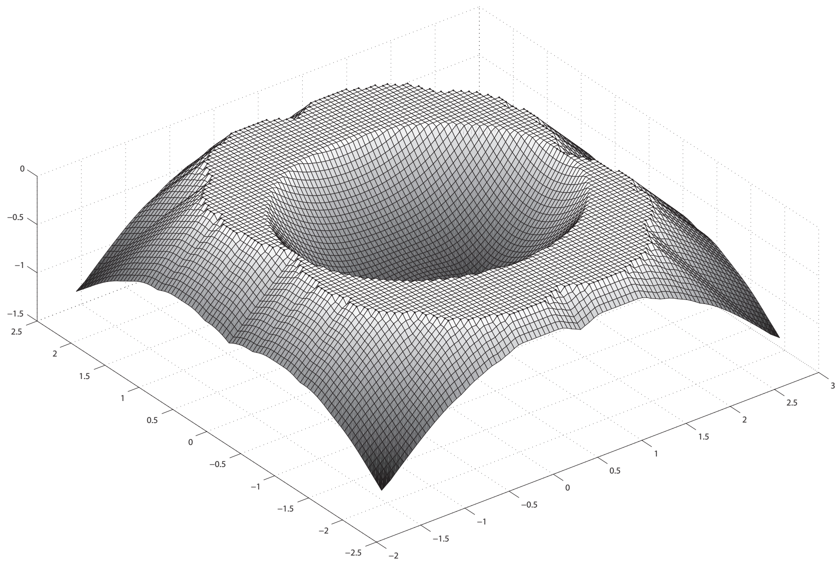

Рис. 6: График функции h_1 *для* $\lambda = \frac{1}{2}$

Очевидно, что $h(z) \geq 0$ для $z \in A_f$ и $h(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Поскольку $z = 0$ притягивающая неподвижная точка, то функция h непрерывна в этой точке.

Пусть $z \in A_f, \quad z \neq 0, \quad m \in I_z, \quad 0 < \varepsilon < h(z)$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(z) = 0$, найдется номер $N > \max I_z$ такой, что

$$|f^{\circ k}(z)| < \varepsilon \qquad \text{для} \qquad k > N.$$

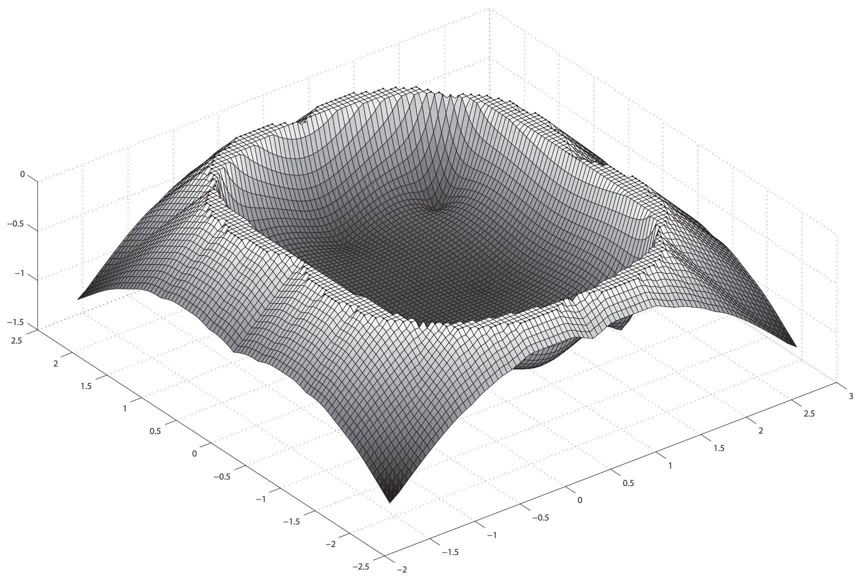

Рис. 7: График функции h_3 *для* $\lambda = \frac{1}{2}$

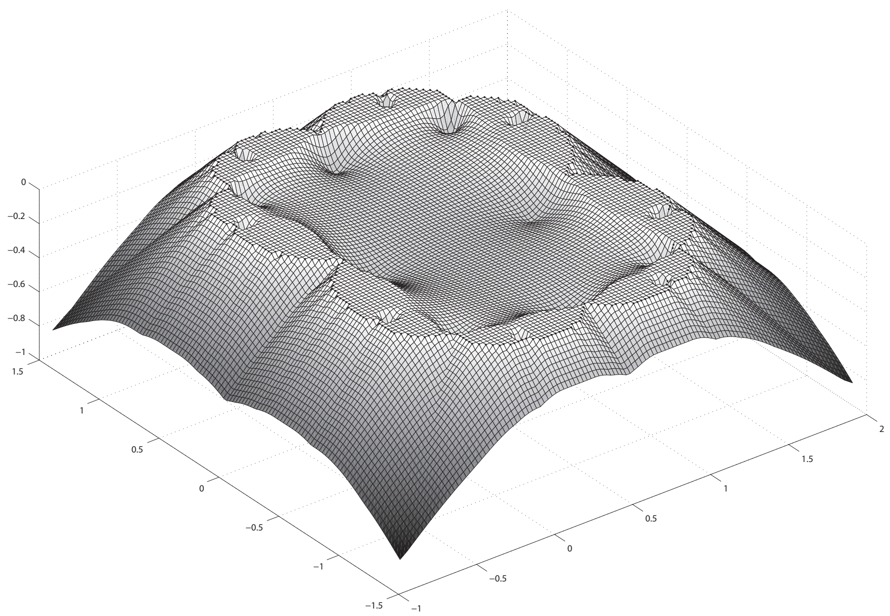

Рис. 8: График функции h_4 *для* $\lambda = 2(\sqrt{2} - 1)$

При этом

$$h(z) = \max\left\{|f^{\circ k}(z)| : k \leq N\right\}.$$

Пусть далее

$$r = \min\left\{|f^{\circ m}(z)| - |f^{\circ k}(z)| : k \leq N\right\},$$

$$\varepsilon_1 = \min\left\{\varepsilon, \frac{r}{2}\right\}.$$

Так как все функции $f^{\circ k}(z)$ непрерывны на A_f, найдется число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $u \in O_{z,\delta}$ и для любого $k \leq N$ верно неравенство

$$|f^{\circ k}(z) - f^{\circ k}(u)| < \varepsilon_1. \tag{7}$$

В частности,

$$|f^{\circ m}(z) - f^{\circ m}(u)| < \varepsilon_1 \leq \varepsilon, \qquad u \in O_{z,\delta}.$$

Пусть $u \in O_{z,\delta}$ и $s \in I_u$. Предположим, что $s \notin I_z$. Тогда имеют место неравенства

$$|f^{\circ m}(z)| - |f^{\circ s}(z)| \geq r,$$

$$|f^{\circ m}(u)| \leq \sup|f^{\circ k}(u)| : k \in \mathbb{N} \cup 0 = |f^{\circ s}(u)|.$$

С другой стороны, из неравенства (7) и определения чисел r и ε_1 следует (Рис. 9):

$$|f^{\circ m}(u) - f^{\circ s}(u)| \geq r - 2\varepsilon_1 > 0,$$

что противоречит предыдущему неравенству.
Таким образом, $s \in I_u \cap I_z$. Поэтому имеют место соотношения

$$s \leq N,$$

$$h(u) = \sup\{|f^{\circ k}(u)| : k \in \mathbb{N} \cup 0\} = |f^{\circ s}(u)|,$$

$$h(z) = \sup\{|f^{\circ k}(z)| : k \in \mathbb{N} \cup 0\} = |f^{\circ m}(z)| = |f^{\circ s}(z)|.$$

Последние два из этих соотношений показывают справедливость неравенства

$$|h(z) - h(u)| = ||f^{\circ s}(z)| - |f^{\circ s}(u)|| \leq |f^{\circ s}(z) - f^{\circ s}(u)|.$$

Из (7) следует, что $|h(z) - h(u)| \leq \varepsilon$ для $u \in O_{z,\delta}$. Это означает непрерывность функции f в точке z.

Для «хороших» отображений f функцию h можно продолжить на всю комплексную плоскость по той же схеме, что и в пункте 1.

Для отображения $f(z) = \lambda z(1-z), \quad 0 < \lambda < 1$ одним из таких продолжений является функция

$$\tilde{h}(z) = \begin{cases} -\rho(z, J_f), & z \in \mathbb{C} \backslash \bar{A}_f, \\ 0, & h(z) - |z_{fix}| \geq 0, \\ h(z) - |z_{fix}|, & h(z) - |z_{fix}| < 0. \end{cases} \tag{8}$$

График этой функции приведен на Рис. 10.

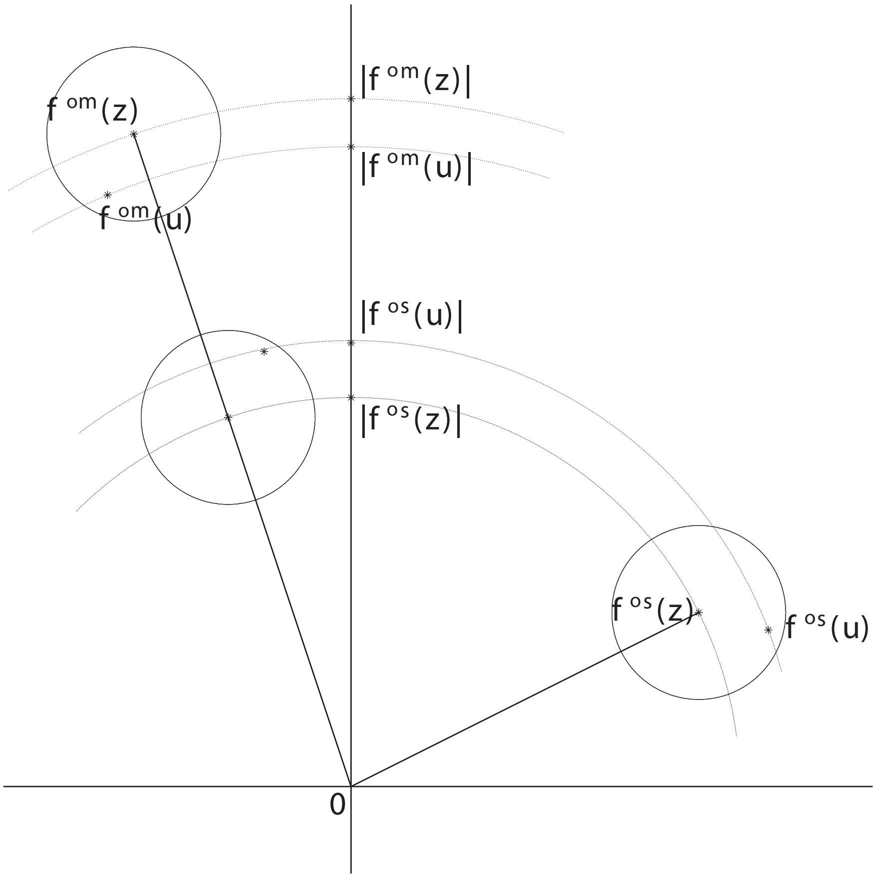

Рис. 9: Геометрическая иллюстрация оценки (9)

Заключение

Построение равновесных функций даже для отдельных конкретных отображений является непростой и важной задачей динамики. Множество всех равновесных функций фиксированного отображения дает полное описание его динамики. Отдельные равновесные функции позволяют получить некоторые динамические свойства отображений. Так, примеры, приведенные в данной работе, позволяют утверждать, что рассматриваемые отображения не имеют конечных притягивающих циклов. (Этот факт известен и может быть получен из других соображений.)

Отметим еще, что использовались две различные конструкции равновесных функций. В частности, в конструкции пункта 1 очевидна непрерывность конструируемой функции и нетривиальна проверка основного условия равновесности, а в конструкции пункта 2 – наоборот.

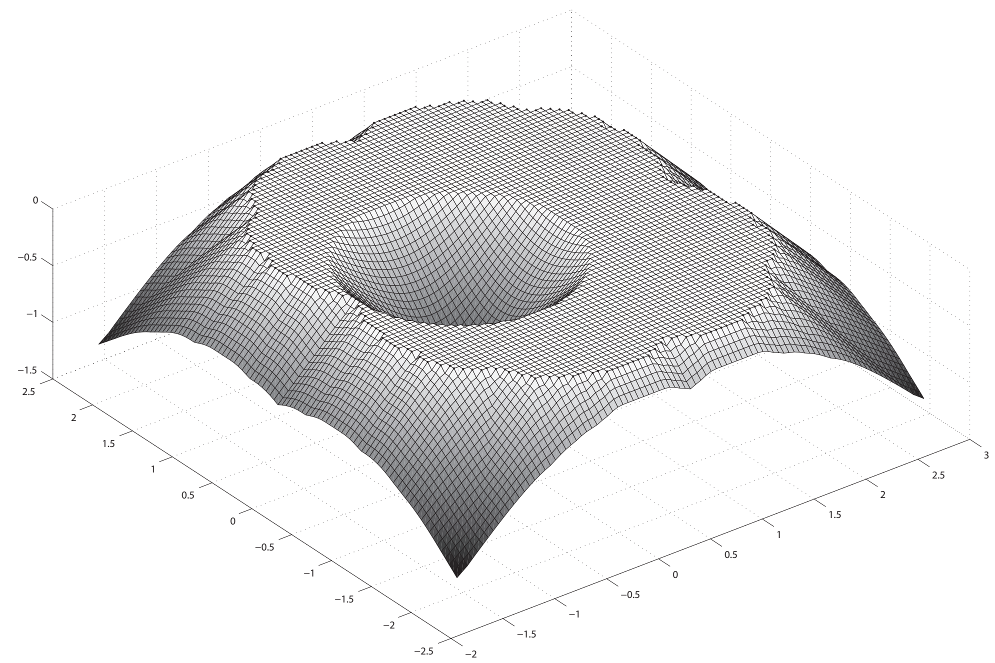

Рис. 10: График функции (10) для $\lambda = \frac{1}{2}$

Список литературы

[1] Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 320 с.

[2] Боруленкова Е.М., Гусев А.И. Моделирование топологической динамики голоморфных отображений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2010. № 16. С. 87–94.

[3] Боруленкова Е.М., Гусев А.И. Примеры равновесных функций голоморфных отображений // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской государственный университет, 2010. С. 17–20.

[4] Афанасьева Е.М., Гусев А.И. Моделирование топологической динамики голоморфных отображений в окрестности нейтральной неподвижной точки // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2012. № 1(24). С. 165–170.

[5] Баранова О.Е., Гусев А.И. Точный пример равновесной функции голоморфного отображения в окрестности параболической неподвижной точки // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 127–133.

Библиографическая ссылка

Баранова О.Е., Гусев А.И., Ксендз З.А. Моделирование равновесных функций голоморфных отображений в окрестности притягивающей неподвижной точки // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 85–100.

Сведения об авторах

1. **Баранова Ольга Евгеньевна**
доцент кафедры математического анализа Тверского госуниверситета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: baranova.oe@tversu.ru.

2. **Гусев Анатолий Иванович**
доцент кафедры математического анализа Тверского госуниверситета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: gusev.ai@tversu.ru.

3. **Ксендз Зоя Андреевна**
магистрант кафедры математического анализа Тверского госуниверситета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

MODELING OF EQUILIBRIUM FUNCTIONS OF HOLOMORPHIC MAPPINGS IN NEIGHBOURHOOD OF ATTRACTING FIXED POINT

Baranova Olga
Associate professor at Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.
E-mail: baranova.oe@tversu.ru
Gusev Anatoly
Associate professor at Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.
E-mail: gusev.ai@tversu.ru
Ksendz Zoya
Master student of Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 02.09.2015, revised 10.09.2015.

In Ref [2-5] we studied the properties of equilibrium functions for holomorphic mappings. There were examples of equilibrium functions for complex polynomials. In this paper we present two new methods of constructing equilibrium functions.

Keywords: holomorphic function, equilibrium function, domain of attraction of a fixed point, Julia set.

Bibliographic citation

Baranova O.E., Gusev A.I., Ksendz Z.A. Modeling of equilibrium functions of holomorphic mappings in neighbourhood of attracting fixed point. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 3, pp. 85–100. (in Russian)